HEXAGON

Q-DAS qs-STAT

Assistent (Testverfahren)

Erläuterung und Handhabung

FAQ/Handling
25 September 2023
Created with version 14.0.3.2

HxGN
Quality Assurance

Information about this document

Parts of this document may be automatically translated.

Document History

Version	Date	Author(s)	Modifications / Remarks
v-0.78	09.20.2023	MBR	Translation (EN: v-0.91)

INHALT

1 Testverfahren des Fensters „Assistent (Testverfahren)“

Diese FAQ beschreibt die Testverfahren, die im Fenster "Assistent (Testverfahren)" (alter Name: "Assistent (Planen/Durchführen)") zu bedienen sind. Die rein technische Handhabung und Datenaufbereitung sind in einem separaten Dokument beschrieben.

2 Testverfahren für attributive Merkmale

Bevor ein Testverfahren im Fenster „Assistent (Testverfahren)“ ausgewählt werden kann, werden Daten benötigt. Der erste Schritt ist daher das Öffnen des gewünschten Datensatzes oder das Anlegen eines neuen Datensatzes.

2.1 Attributive Daten – Tests für eine Stichprobe

In diesem Abschnitt sind die attributiven Testverfahren für eine Stichprobe beschrieben, die sich innerhalb des Fensters „Assistent (Testverfahren)“ befinden.

2.1.1 p-Test (PV) 1 – Poisson-Verteilung (1 Stichprobe, Fehler je Einheit)

Wähle diesen Test, wenn eine *Anzahl Fehler pro Einheit* μ mit einem vorgegebenen Sollwert μ_0 verglichen werden soll.

Beispiel: Ein komplexer Produktionsprozess weist langfristig nahezu konstant eine *mittlere Anzahl an Fehlern pro Einheit* $\mu_0 = 0.05$ auf. In der laufenden Produktion wurden $x = 22$ Fehler auf $n = 125$ geprüften Teilen beobachtet, was der *mittleren Anzahl Fehler pro Einheit* $\mu = \frac{22}{125} = 0.176$ entspricht. Die Produktionsleitung geht von einem alarmierenden Signal für eine systematische Vergrößerung aus, da die erwartete "normale" Anzahl bei $\left(\mu_0 = 0.05 \times \frac{125}{125} = \frac{6.25}{125}\right)$ ungefähr $x = 6$ Fehlern auf $n = 125$ geprüften Einheiten liegen sollte. Aus diesem Grund wird ein p-Test (PV) 1 durchgeführt:

- Mittlere Anzahl Fehler pro Einheit in der aktuellen Produktion (Alternativhypothese): $\mu_1 = \frac{22}{125}$
- Mittlere Anzahl Fehler pro Einheit in der Vergangenheit (Nullhypothese): $\mu_0 = 0.05 = 0.05 \times \frac{125}{125} = \frac{6.25}{125}$

Dateneingabe im Fenster "Tabelle der Merkmale 2":

Gesicherte Verteilung : Poissonverteilung

Stichprobenart (attributiv) : konstant

Dateneingabe im Fenster "Wertemaske":

Stichprobenumfang : 125

Anzahl der Nichtübereinstimmungen (x) : 22

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Folgenden Schaltflächen werden nacheinander angeklickt:
    <Diskrete Verteilungen> | <1 Grundges.> | <Poisson> | <P-Test (PV) 1>
  - Auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.

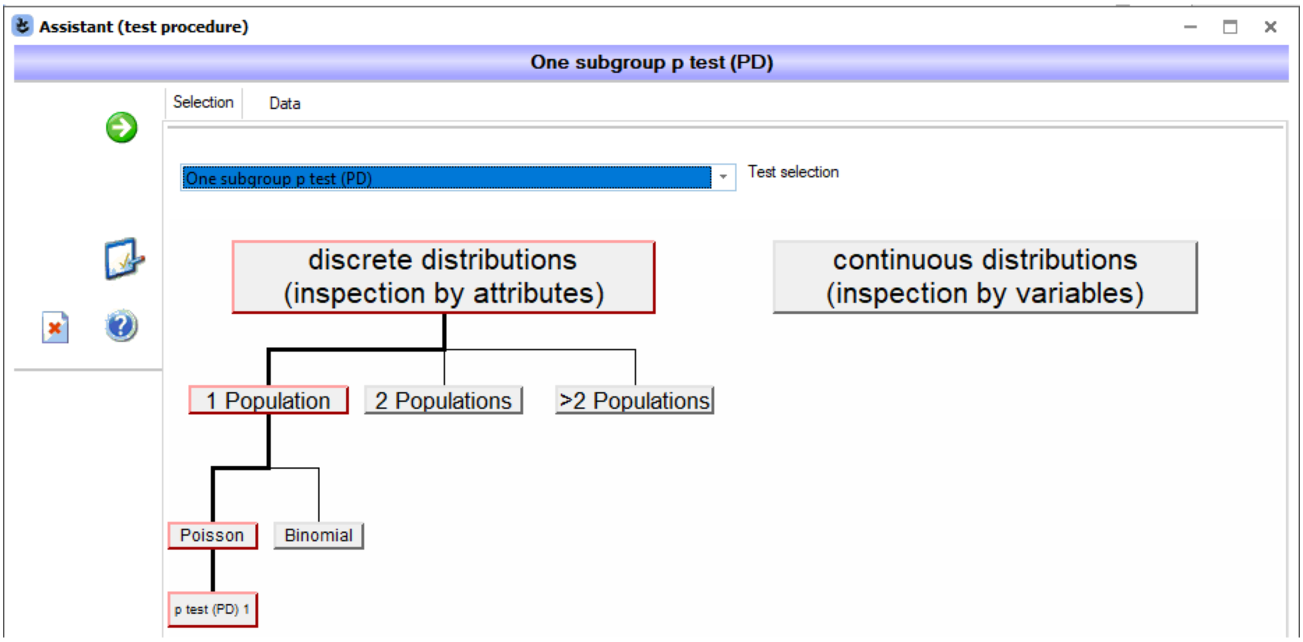


Abbildung 1: Fenster "Assistent (Testverfahren)" - Auswahl des Testverfahrens "p-test (PV) 1"

- Register <Daten>:
    - In der Spalte „aktiv“ auf die Zelle des gewünschten Merkmals klicken, um es auszuwählen.
    - Zweimal auf die grüne Vorwärtsschaltfläche klicken (➔).

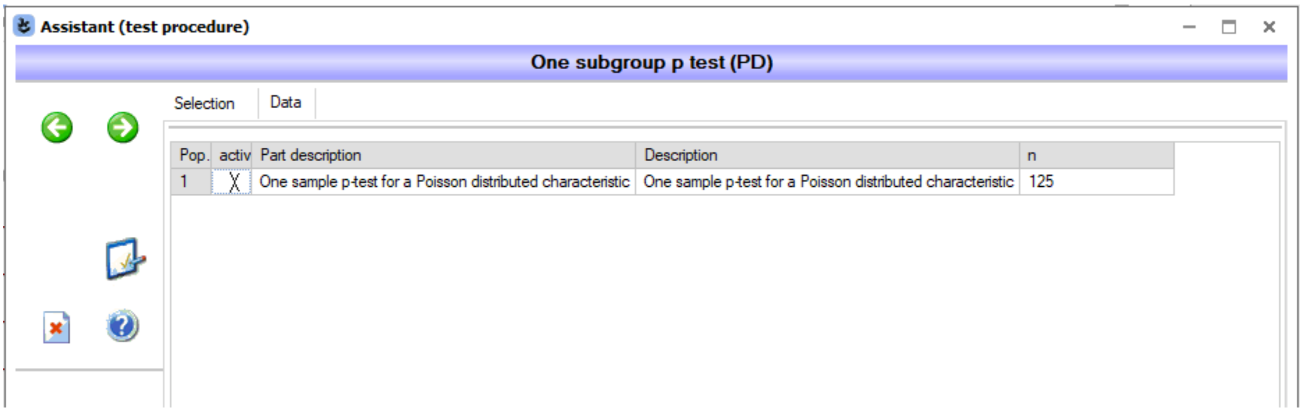


Abbildung 2: Fenster "Assistent (Testverfahren)" - Auswahl des Merkmals.

- Register <Test>:
    - Die Werte gemäß der Abbildung 3 eingeben.
    - Klicke auf das "Taschenrechner"-Symbol, um den Test auszuführen.

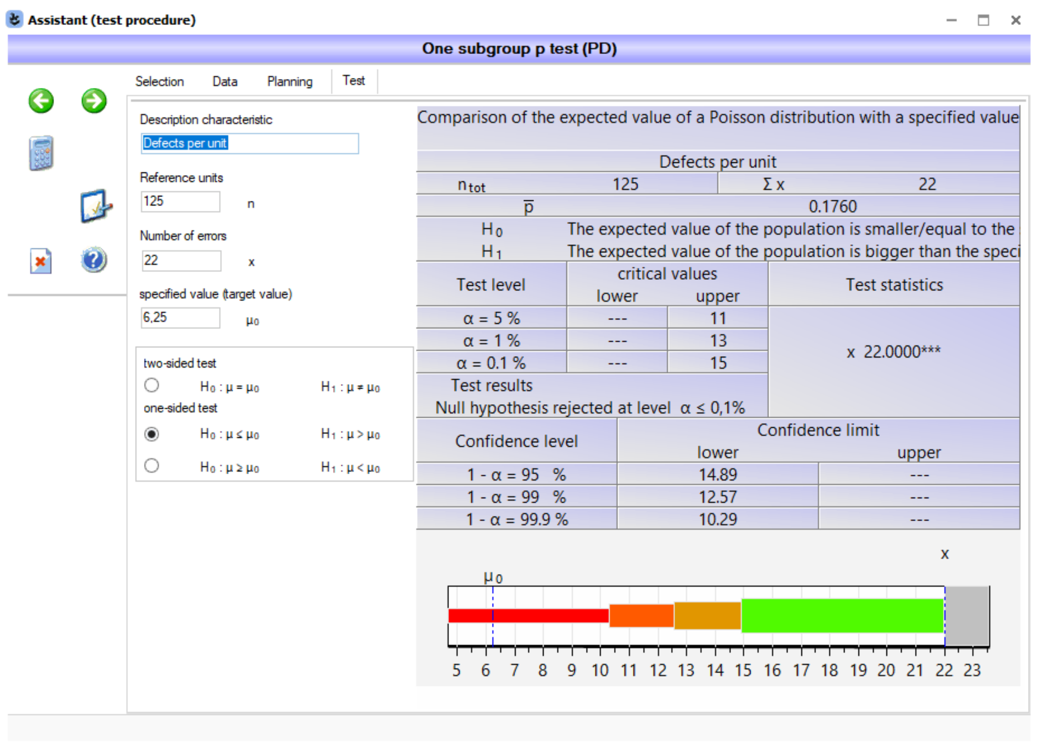


Abbildung 3: Fenster "Assistent (Testverfahren)" mit den Testergebnissen. Die Nullhypothese wurde auf dem Signifikanzniveau kleiner gleich 0,1 % verworfen – die Anzahl Fehler pro Einheit ist systematisch erhöht.

Das Ergebnis des Tests: Die Nullhypothese H0 wird auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.1\ \%$ verworfen. Das bestätigt die Annahme einer systematisch erhöhten Anzahl an Fehlern pro Einheit in der laufenden Produktion.

Berechnung der kritischen Werte

Die *kritischen Werte* werden mit der *Verteilungsfunktion* der Poissonverteilung für die Wahrscheinlichkeiten $1 - \alpha = 95\ \%, 99\ \%$ und $99.9\ \%$ berechnet. Die Berechnung erfolgt mit dem Parameter μ der Nullhypothese:

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\mu^i}{i!} exp^{-\mu}$$

wobei k die Anzahl der Einheiten ist, für die die Verteilungsfunktion zum *ersten Mal* gleich oder größer wird als die Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$.

Für das oben genannte Beispiel ist die Verteilungsfunktion für $k = 11$ das erste Mal größer als $1 - \alpha = 95\ \%$:

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k=11} \frac{6.25^i}{i!} exp^{-6.25} \approx 0{,}97367\ \ (\widehat{=}\ 97.367\ \%)$$

wobei der Parameter $\mu = 0.05 \times 125 = 6.25$ die erwartete Anzahl Fehler pro 125 Einheiten ist (Nullhypothese).

Allgemein gilt: Der kritische Wert k ist gefunden, wenn die Verteilungsfunktion …

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\mu^i}{i!} exp^{-\mu}$$

das erste Mal *größer als* oder *gleich* der jeweiligen Wahrscheinlichkeit in der folgenden Tabelle ist:

Table 1: Wahrscheinlichkeiten zur Ermittlung der kritischen Werte k für einseitige und zweiseitige Tests.

Vertrauensniveau	$H1: \mu < \mu_0$	$H1: \mu > \mu_0$	$H1: \mu \neq \mu_0$	
	Einseitig unten	Einseitig oben	Zweiseitig unten	Zweiseitig oben
95 %	$\alpha = 5\ \%$	$1 - \alpha = 95\ \%$	$\alpha/2 = 2.5\ \%$	$1 - \alpha/2 = 97.5\ \%$
99 %	$\alpha = 1\ \%$	$1 - \alpha = 99\ \%$	$\alpha/2 = 0.5\ \%$	$1 - \alpha/2 = 99.5\ \%$
99.9 %	$\alpha = 0.1\ \%$	$1 - \alpha = 99.9\ \%$	$\alpha/2 = 0.05\ \%$	$1 - \alpha/2 = 99.95\ \%$

Berechnung der Vertrauensgrenzen

Die *Grenzwerte* für den *einseitig nach unten begrenzten* Vertrauensbereich des Beispiels wurden für die Vertrauensniveaus $1 - \alpha = 95\ \%, 99\ \%$ und $99.9\ \%$ berechnet. Dabei wurde die folgende Beziehung zur Chi²-Verteilung verwendet, wobei x die *Anzahl der Fehler* in der Stichprobe ist:

$$x_{ci1s.lower} = \frac{\chi^2_{2x,\alpha}}{2}$$

Für das oben genannte Beispiel ist die *einseitig untere* 95 %-*Vertrauensbereichsgrenze*:

$$x_{ci1s.lower} = \frac{\chi^2_{2\times 22,\alpha=0.05}}{2} = \frac{29.78748}{2} = 14.893$$

Die weiteren einseitig unteren Vertrauensbereichsgrenzen werden auf die gleiche Weise berechnet, jedoch mit $\alpha = 1$ % und 0.1 %.

Table 2: Gleichungen zur Bestimmung ein- und zweiseitiger Vertrauensbereichsgrenzen

Vertrauensniveau	$H1: \mu < \mu_0$	$H1: \mu > \mu_0$	$H1: \mu \neq \mu_0$	
	Einseitig oben	Einseitig unten	Zweiseitig unten	Zweiseitig oben
95 %	$\frac{\chi^2_{p=0.95,df=2x+2}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.05,df=2x}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.025,df=2x}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.975,df=2x+2}}{2}$
99 %	$\frac{\chi^2_{p=0.99,df=2x+2}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.01,df=2x}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.005,df=2x}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.995,df=2x+2}}{2}$
99.9 %	$\frac{\chi^2_{p=0.999,df=2x+2}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.001,df=2x}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.0005,df=2x}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.9995,df=2x+2}}{2}$

Referenz:

Joachim HARTUNG
Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik
15. Auflage
Oldenbourg (2009)
ISBN 978-3-486-59028-9
Kapitel 3.4.1 auf Seite 214

2.1.2 p-Test (BV) 1 – Binomialverteilung (1 Stichprobe, Anteil fehlerhafter Einheiten)

Der Test "p-Test (BV) 1" wird gewählt, wenn eine Anzahl *fehlerhafter* Einheiten mit einem vorgegebenen Sollwert vergleichen werden soll. Ein Sollwert kann z. B. aus einer Anforderung, aus einem erwarteten Wert oder aus Langzeitdaten der Vergangenheit abgeleitet werden.

Beispiel: Ein komplexer Produktionsprozess weist über einen langen Zeitraum hinweg einen nahezu konstanten Anteil fehlerhafter Einheiten $p_0 = 0.05\ (entspricht\ 5\ \%)$ auf. In der letzten Produktion hat man beim End-of-Line Test $n = 100$ Einheiten geprüft und darunter x = 12 fehlerhafte Einheiten festgestellt. Dies ergibt einen Anteil fehlerhafter Einheiten: $p = \frac{12}{100} = 0.12\ (entspricht\ 12\ \%)$. Die Produktionsleitung geht von einem Alarmsignal für einen *systematischen* Anstieg der Anzahl fehlerhafter Einheiten aus und führt aus diesem Grund einen p-Test (BV) 1 durch:

- Derzeitiger Anteil fehlerhafter Einheiten in der Produktion (Alternativhypothese): $p_1 = \frac{12}{100} = 0{,}12$
- Langfristig beobachteter Anteil fehlerhafter Einheiten in der Produktion (Nullhypothese): $p_0 = 0.05$

Dateneingabe im Fenster "Merkmalstabelle 2":

Gesicherte Verteilung : Binomialverteilung

Stichprobenart (attributiv) : konstant

Dateneingabe im Fenster "Wertemaske":

Gesamter Stichprobenumfang der geprüften Einheiten : 100

Anzahl der gezählten nichtübereinstimmenden Einheiten : 12

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>
  - Die folgenden Schaltflächen werden nacheinander angeklickt:
    <Diskrete Verteilungen> | <1 Grundgesamtheit> | <Binomial> | <p-Test (BV) 1>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte „aktiv“ auf die Zelle des gewünschten Merkmals klicken, um es auszuwählen.
  - *Zweimal* auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.

- Register <Testen>:
  - Den Sollwert in das Feld "vorgegebener Wert (Sollwert)" eingeben (Abbildung 4)
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

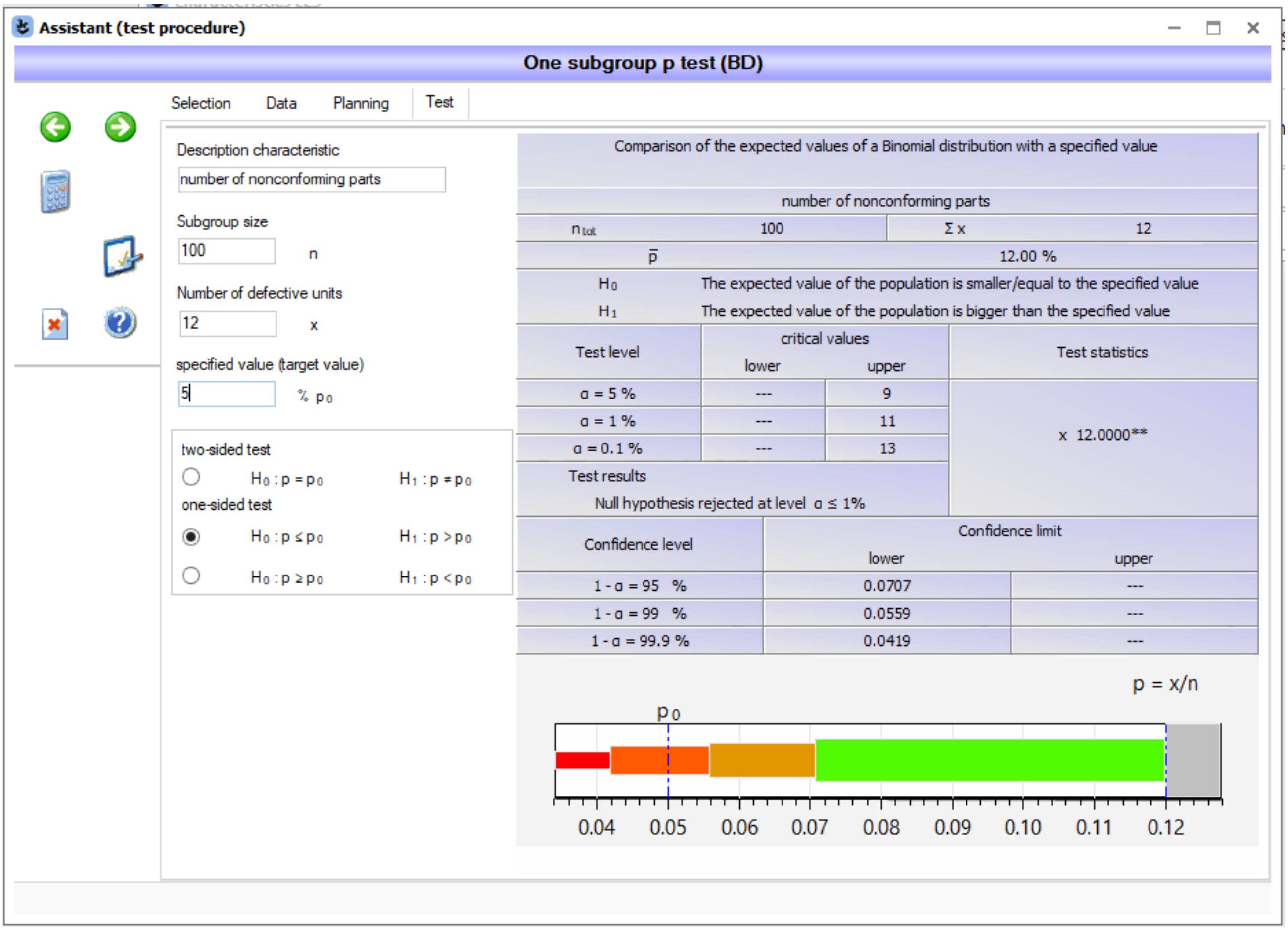


Abbildung 4: Fenster "Assistent (Testverfahren)" - zeigt die Ergebnisse des Verfahrens "p-test (BV) 1". Die Nullhypothese wurde auf dem Signifikanzniveau kleiner-gleich $\alpha \leq 1\,\%$ verworfen: Der aktuelle Anteil fehlerhafter Einheiten ist signifikant höher im Vergleich zum langjährigen Mittelwert der Vergangenheit.

Berechnung der kritischen Werte

Der obere kritische Wert des einseitigen Tests wird anhand der kumulativen Verteilungsfunktion der Binomialverteilung berechnet: Der *obere kritische Wert* zum Vertrauensniveau $1 - \alpha = 95\,\%$ ist der Wert für k, bei dem die folgende Summe zum *ersten Mal* gleich oder größer ist als die Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$.

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \times p^{i} \times (1-p)^{(n-i)}$$

Für das obige Beispiel ist der kritische Wert $k = 9$, da für $k = 9$ die folgende Summe das erste Mal größer ist als die Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 95\,\%$ $(entpsricht\ dezimal\ 0.95)$.

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k=9} \binom{100}{i} \times 0.05^i \times (0.95)^{(100-i)} \approx 0{,}9718$$

Table 3: Wahrscheinlichkeiten zur Bestimmung der kritischen Werte k für ein- und zweiseitige Tests.

Vertrauensniveau	$H1: p < p_0$	$H1: p > p_0$	$H1: p \neq p_0$	
	Einseitig unten	Einseitig oben	Zweiseitig unten	Zweiseitig oben
95 %	$\alpha = 5\,\%$	$1 - \alpha = 95\,\%$	$\alpha/2 = 2.5\,\%$	$1 - \alpha/2 = 97.5\,\%$
99 %	$\alpha = 1\,\%$	$1 - \alpha = 99\,\%$	$\alpha/2 = 0.5\,\%$	$1 - \alpha/2 = 99.5\,\%$
99.9 %	$\alpha = 0.1\,\%$	$1 - \alpha = 99.9\,\%$	$\alpha/2 = 0.05\,\%$	$1 - \alpha/2 = 99.95\,\%$

Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen

Die Vertrauensbereichsgrenzen werden mit der Quantil-Funktion (inverse Verteilungsfunktion) der Beta-Verteilung $B^{-1}(p, a, b)$ ermittelt:

Table 4: Bestimmungsgleichungen für ein- und zweiseitige Vertrauensbereichsgrenzen

Vertrauensniveau	$H1: p < p_0$	$H1: p > p_0$	$H1: p \neq p_0$	
	Einseitig oben $a = x + 1, b = n - x$	Einseitig unten $a = x, b = n - x + 1$	Zweiseitig unten $a = x, b = n - x + 1$	Zweiseitig oben $a = x + 1, b = n - x$
95 %	$B^{-1}(0.95, a, b)$	$B^{-1}(0.05, a, b)$	$B^{-1}(0.025, a, b)$	$B^{-1}(0.975, a, b)$
99 %	$B^{-1}(0.99, a, b)$	$B^{-1}(0.01, a, b)$	$B^{-1}(0.005, a, b)$	$B^{-1}(0.995, a, b)$
99.9 %	$B^{-1}(0.999, a, b)$	$B^{-1}(0.001, a, b)$	$B^{-1}(0.0005, a, b)$	$B^{-1}(0.9995, a, b)$

a : Erster Formparameter der Beta-Verteilung.

b : Zweiter Formparameter der Beta-Verteilung.

x : Beobachtete Anzahl fehlerhafter Einheiten.

n : Gesamtumfang der Stichprobe.

2.2 Attributive Daten – Tests für zwei Stichproben

In diesem Abschnitt sind die attributiven Testverfahren für zwei Stichproben beschrieben, die sich innerhalb des Fensters „Assistent (Testverfahren)“ befinden.

2.2.1 p-Test (PV) 2 – Poissonverteilung (2 Stichproben, Fehler je Einheit)

Neuen Datensatz mit *zwei* attributiven Merkmalen erstellen:

- Register <Datei> | <Neu> und "2 neue diskrete Merkmale" erstellen.

Folgende Werte in das Fenster "Merkmalsmaske" eingeben:

Eingabefeld	Merkmal 1	Merkmal 2
Merkmalsnummer	PL 01	PL 02
Merkmalsbezeichnung	Anzahl Fehler auf Linie 01	Anzahl Fehler auf Linie 02
Stichprobenumfang (K8500)	225	225
Stichprobenart (attributiv) (K8503)	konstant	konstant
Verteilung (K2011)	Poissonverteilung	Poissonverteilung

Folgende Werte in das Fenster "Wertemaske" eingeben:

Spaltenname in der Wertemaske	Eingabewert
Anzahl Fehler auf Linie 01	20
Anzahl Fehler auf Linie 02	8

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
    - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
      <Diskrete Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <Poisson> | <p-Test (PV) 2>
- Register <Daten>:
    - In der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
    - *Zweimal* auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Testen>:
    - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen

- Auf das „Taschenrechner“-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

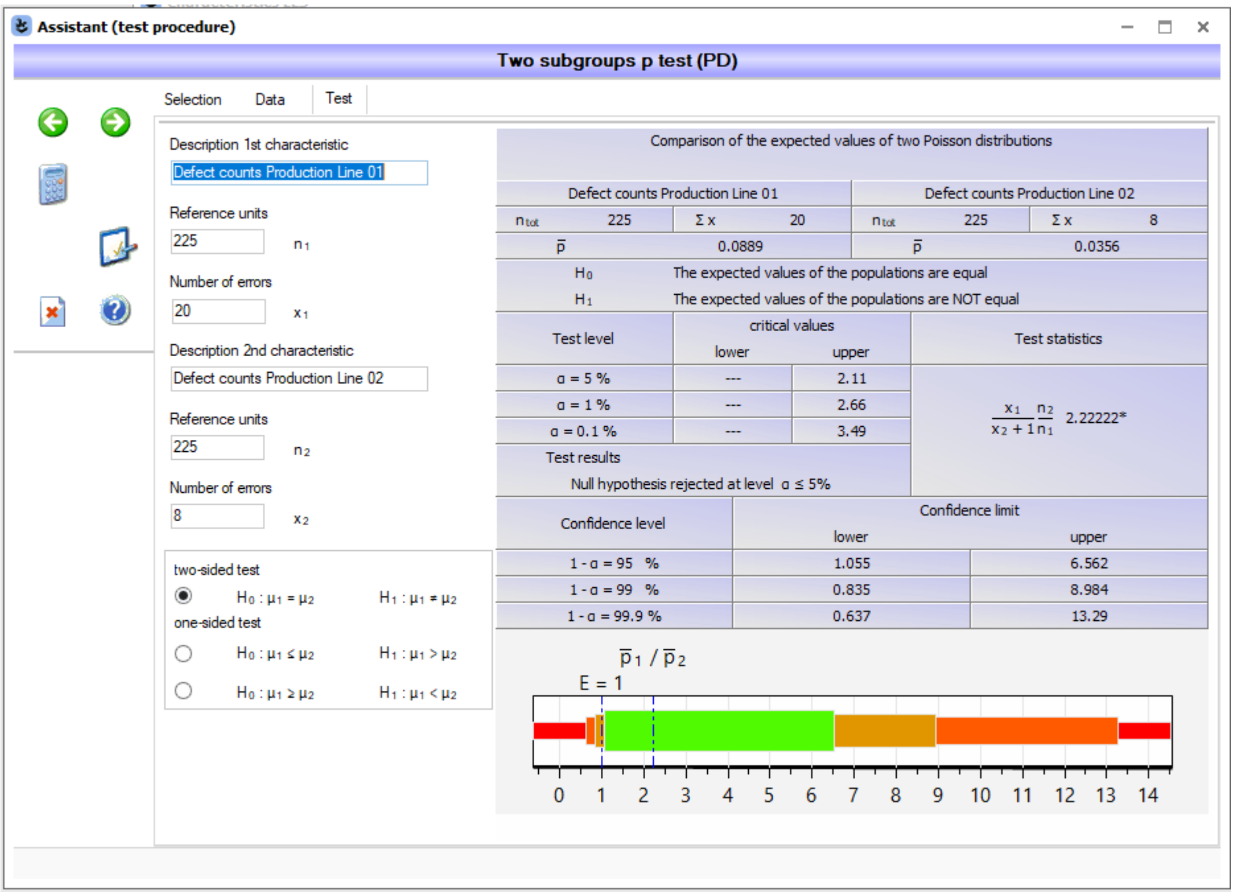


Abbildung 5: Fenster "Assistent (Testverfahren)" mit dem Ergebnis des Zwei-Stichproben-P-Tests für die Anzahl der Nichtübereinstimmungen. In diesem Beispiel ist die beobachtete Anzahl der Nichtübereinstimmungen in beiden Produktionslinien signifikant unterschiedlich.

Bei der Eingabe der Beispieldaten ist die Eingabereihenfolge zu beachten (die erste Stichprobe ist immer diejenige mit der größeren Anzahl Fehler je Einheit):

$$\frac{x_1}{n_1} \geq \frac{x_2}{n_2}$$

Bemerkung: Wenn diese Eingabereihenfolge nicht beachtet wird, ändert die Software die Anordnung der Merkmale automatisch gemäß dieser Regel. Leider wird in diesem Fall die ausgegebene Formel für die Prüfgröße nicht entsprechend angepasst. Berücksichtigen Sie diesen Sachverhalt, wenn Sie die Berechnungen der Software von Hand nachvollziehen möchten.

Berechnung der Prüfgröße und des kritischen Wertes des p-Tests bei zwei Stichproben (PV):

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert für das Niveau der Signifikanz α
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\frac{x_1}{x_2+1} \times \frac{n_2}{n_1}$	$> F_{df_1, df_2, 1-\alpha}$
$\mu_1 \geq \mu_2$	Dieser Fall ist zu vermeiden (Eingabereihenfolge-Regel)		
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\frac{x_1}{x_2+1} \times \frac{n_2}{n_1}$	$> F_{df_1, df_2, 1-\frac{\alpha}{2}}$

Dabei ist F die Quantilfunktion (inverse kumulative Verteilungsfunktion) der F-Verteilung mit den folgenden Freiheitsgraden: $df_1 = 2(x_2+1)$ und $df_2 = 2x_1$.

Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen

Bestimmungsgleichung für die zweiseitigen Vertrauensbereichsgrenzen für das Verhältnis μ_1/μ_2:

$$\frac{x_1}{(x_2+1)} \times \frac{1}{F_{df_{1.l}, df_{2.l}, 1-\alpha/2}} \leq \frac{\mu_1}{\mu_2} \leq \frac{(x_1+1)}{x_2} \times F_{df_{1.u}, df_{2.u}, 1-\alpha/2}$$

mit

$df_{1l} = 2(x_2+1)$

$df_{2l} = 2x_1$

$df_{1u} = 2(x_1+1)$

$df_{2u} = 2x_2$

Bei der Berechnung einseitiger Vertrauensbereichsgrenzen verwendet die Software das Vertrauensniveau $1-\alpha$ anstelle von $1-\alpha/2$.

Referenz:

Ulrich GRAF, Hans-Joachim HENNING, Kurt STANGE, Peter-Theodor WILRICH
Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik
Dritte Ausgabe
Springer 1998
ISBN 3-540-16901-6
Formeln (6.13.4) und (6.13.8), S. 191 - 193

2.2.2 p-Test (BV) 2 – Binomialverteilung (2 Stichproben, Anteil fehlerhafter Einheiten)

Einen neuen Datensatz mit *zwei* diskreten (attributiven) Merkmalen erstellen:

- Register <Datei> | <Neu> und "2 neue diskrete Merkmale" erstellen.

Dateneingabe Im Fenster "Merkmalsmaske":

Eingabefeld	Erstes Merkmal	Zweites Merkmal
Merkmalsnummer	PL 01	PL 02
Merkmaslbezeichnung	Fehlerhafte Einheiten Linie 01	Fehlerhafte Einheiten Linie 02
Stichprobenumfang (K8500)	225	225
Stichprobenart (attributiv) (K8503)	konstant	konstant
Verteilung (K2011)	Binomialverteilung	Binomialverteilung

Dateneingabe im Fenster "Wertemaske":

Spaltenname in der Werte-Maske	Eingabewert
Fehlerhafte Einheiten Linie 01	20
Fehlerhafte Einheiten Linie 02	8

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)"

- Register <Auswahl>:
    - Die folgenden Schaltflächen nacheinander anklicken:
      <Diskrete Verteilungen> | <2 Grundges.> | <Binomial> | <p-Test (BV) 2>
- Register <Daten>:
    - In der Zeile „aktiv“ auf die Zellen der gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
    - Zweimal auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Testen>:
    - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
    - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

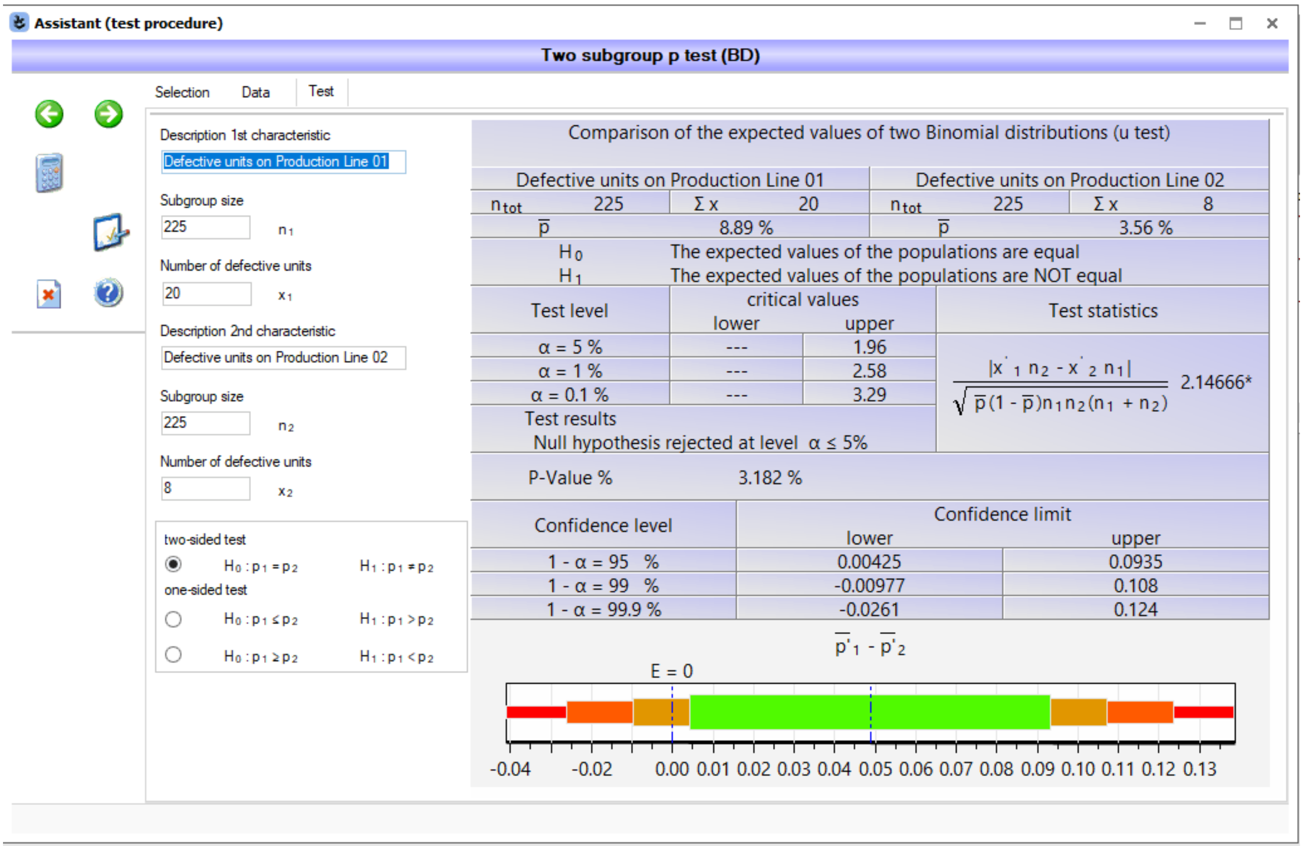


Abbildung 6: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis des p-Tests mit zwei Stichproben (Binomialverteilung). In diesem Beispiel ist die beobachtete Anzahl der fehlerhaften Einheiten in beiden Produktionslinien signifikant unterschiedlich.

Berechnung der statistischen Daten des Tests

In einem ersten Schritt berechnet die Software den Schätzer für den Anteil p (unter Annahme der H0-Bedingung):

$$\bar{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

Die Software berechnet die Häufigkeiten mit einer Kontinuitätskorrektur, x_1' und x_2':

$$x_1' = \begin{cases} x_1 + 0.5 & wenn\ |(x_1 + 0.5) - n_1 \times \bar{p}| < |(x_1 - 0.5) - n_1 \times \bar{p}| \\ x_1 - 0.5 & wenn\ |(x_1 + 0.5) - n_1 \times \bar{p}| > |(x_1 - 0.5) - n_1 \times \bar{p}| \end{cases}$$

$$x_2' = \begin{cases} x_2 + 0.5 & wenn\ |(x_2 + 0.5) - n_2 \times \bar{p}| < |(x_2 - 0.5) - n_2 \times \bar{p}| \\ x_2 - 0.5 & wenn\ |(x_2 + 0.5) - n_2 \times \bar{p}| > |(x_2 - 0.5) - n_2 \times \bar{p}| \end{cases}$$

In einem dritten Schritt berechnet die Software die Prüfgröße in Abhängigkeit von der gewählten Hypothese:

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert für das Niveau der Signifikanz α
$p_1 = p_2$	$p_1 \neq p_2$	$\frac{\lvert x_1' \times n_2 - x_2' \times n_1 \rvert}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p}) \times n_1 \times n_2 \times (n_1 + n_2)}}$	$> z_{1-\alpha}$
$p_1 \leq p_2$	$p_1 > p_2$	$\frac{x_1' \times n_2 - x_2' \times n_1}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p}) \times n_1 \times n_2 \times (n_1 + n_2)}}$	$> z_{1-\alpha}$
$p_1 \geq p_2$	$p_1 < p_2$	$\frac{x_1' \times n_2 - x_2' \times n_1}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p}) \times n_1 \times n_2 \times (n_1 + n_2)}}$	$< -z_{1-\alpha}$

Referenz:

Ulrich GRAF, Hans-Joachim HENNING, Kurt STANGE, Peter-Theodor WILRICH
Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik
3rd Ausgabe
Springer 1998
ISBN 3-540-16901-6
Formeln (6.10.6) auf Seite 186

Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen

Zur Berechnung der zweiseitigen Vertrauensbereichsgrenzen für die Differenz der Anteile $\pi_1 - \pi_2$ verwendet die Software die folgende Näherung:

$$(p_1' - p_2') \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\bar{p} \times (1-\bar{p}) \times \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 \times n_2}\right)}$$

wobei $p_1' = \frac{x_1'}{n_1}$ und $p_2' = \frac{x_2'}{n_2}$

Zur Berechnung einer einseitig unteren *oder* oberen Vertrauensbereichsgrenze verwendet die Software $z_{1-\alpha}$ anstelle von $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

2.3 Attributive Daten – Test für mehrere Stichproben

In diesem Abschnitt sind die attributiven Testverfahren für multiple Stichproben beschrieben, die sich innerhalb des Fensters „Assistent (Testverfahren)“ befinden.

2.3.1 χ^2-Test – Poissonverteilung (>2 Stichproben, Fehler pro Einheit)

Mit diesen Testverfahren prüft man bei mehr als zwei Stichproben auf Gleichheit der Anzahl Fehler pro Einheit. Es wird vorausgesetzt, dass die Stichproben jeweils zufällig aus einer poissonverteilten Grundgesamtheit entnommen wurden.

Für das folgende Beispiel erzeugt man einen neuen Datensatz mit *drei* diskreten (attributiven) Merkmalen:

- Register <Datei> | <Neu> und "3 neue diskrete Merkmale" erstellen.

Dateneingabe im Fenster "Merkmalsmaske":

Eingabefeld	Erstes Merkmal	Zweites Merkmal	Drittes Merkmal
Merkmalsnummer	PL 01	PL 02	PL 03
Merkmalsbezeichnung	Anzahl Fehler Linie 01	Anzahl Fehler Linie 02	Anzahl Fehler Linie 03
Stichprobenumfang (K8500)	125	125	125
Stichprobenart (attributiv) (K8503)	konstant	konstant	konstant
Verteilung (K2011)	Poissonverteilung	Poissonverteilung	Poissonverteilung

Dateneingabe Im Fenster "Wertemaske":

Spaltenname in der Werte-Maske	Eingabewert
Anzahl Fehler Linie 01	20
Anzahl Fehler Linie 02	8
Anzahl Fehler Linie 03	7

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
    - Die folgenden Schaltflächen sind nacheinander zu klicken:
      <Diskrete Verteilungen> | < >2 Grundgesamtheiten > |<Poisson>| <χ^2-Test>
- Register <Daten>:
    - Klicke in der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der gewünschten drei oder mehr Merkmale, um diese auszuwählen.
    - Zweimal auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Testen>:
    - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
    - Klicke auf das "Taschenrechner"-Symbol, um die Auswertung auszuführen.

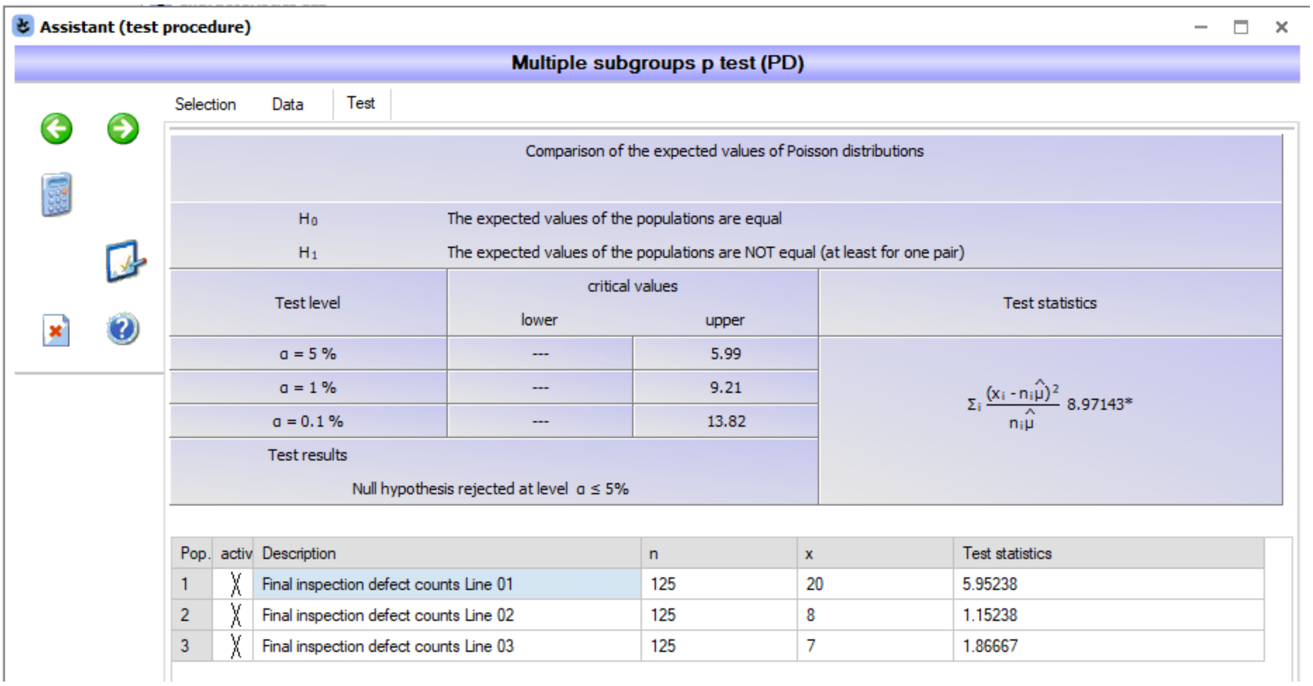


Abbildung 7: Fenster "Assistent (Testverfahren)" mit dem Ergebnis des Mehrstichproben p-Tests (Poissonverteilung) für die beobachte Anzahl Fehler je Einheit bei drei End-of-Line Tests. Das Ergebnis ist signifikant auf dem Niveau $\alpha = 5\,\%$.

Berechnen der Prüfgröße und der kritischen Werte des Multiple-Stichproben-p-Tests
Als Vorbedingung muss jede der x_i größer oder gleich fünf sein sollte.

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\mu_i = konstant$	$\mu_i \neq \mu_j$ für mindestens ein Paar	$\sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - n_i \times \hat{\mu})^2}{n_i \times \hat{\mu}}$	$> \chi^2_{1-\alpha,\,k-1}$

mit
k : Anzahl der Stichproben.
n_i : Stichprobenumfang der $i-ten$ Stichprobe.
x_i : Anzahl Fehler in der $i-ten$ Stichprobe.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{n_i}$$

$\chi^2_{1-\alpha,k-1}$: $1-\alpha$ Quantil (inverse Verteilungsfunktion) der Chi²-Verteilung mit $k-1$ Freiheitsgraden.

Für die Daten im oben angegeben Beispiel:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{n_i} = \frac{1}{3}\left(\frac{20}{125} + \frac{8}{125} + \frac{7}{125}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{35}{125}$$

Da alle $n_i = 125 = konstant$ sind, ergibt sich die Anzahl der erwarteten Häufigkeiten zu:

$$n_i \times \hat{\mu} = 125 \times \frac{1}{3} \times \frac{35}{125} = \frac{35}{3}$$

$$\chi^2 = \frac{(20-35/3)^2}{35/3} + \frac{(8-35/3)^2}{35/3} + \frac{(7-35/3)^2}{35/3} \approx 8.97143 > \chi^2_{95\,\%;2} = 5.9915$$

Als Vorbedingung muss jede der x_i größer oder gleich fünf sein.

Referenz:

Ulrich GRAF, Hans-Joachim HENNING, Kurt STANGE, Peter-Theodor WILRICH
Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik
Dritte Ausgabe
Springer 1998
ISBN 3-540-16901-6
Formeln (6.13.3) auf Seite 193

2.3.2 χ^2 Homogenitätstest – Poissonverteilung (>2 Stichproben, Fehler pro Einheit)

Es gibt eine zweite, ältere Variante des p-Tests für mehrere Stichproben (Poisson-Verteilung), den χ^2-Homogenitätstest. Diese Testvariante ist vermutlich eine Näherungslösung basierend auf der „normalisierenden" Wurzeltransformation. Wenn die Bedingung $n_i x_i < n_i \hat{\mu}$ erfüllt ist, dann wird eine Kontinuitätskorrektur angewendet: $x_i' = x_i + 1$. Mit den Daten des zuvor verwendeten Beispiels berechnet man die folgende Prüfgröße:

$$\chi^2 = \left[2 \times \left(\sqrt{20} - \sqrt{35/3}\right)\right]^2 + \left[2 \times \left(\sqrt{8+1} - \sqrt{35/3}\right)\right]^2 + \left[2 \times \left(\sqrt{7+1} - \sqrt{35/3}\right)\right]^2$$

Die weiteren Berechnungsschritte sind die gleichen wie bei der zuvor beschriebenen Variante des Testverfahrens.

Comparison of the expected values of Poisson distributions			
H_0	The expected values of the populations are equal		
H_1	The expected values of the populations are NOT equal (at least for one pair)		
Test level	critical values lower	critical values upper	Test statistics
α = 5 %	---	5.99	$\Sigma_i\,[2(\sqrt{x_i'} - \sqrt{n_i\hat{\mu}})]^2$ 6.53503*
α = 1 %	---	9.21	
α = 0.1 %	---	13.82	
Test results	Null hypothesis rejected at level α ≤ 5%		

Pop.	activ	Description	n	x	Test statistics
1	X	Final inspection defect counts Line 01	125	20	4.46465
2	X	Final inspection defect counts Line 02	125	8	0.69106
3	X	Final inspection defect counts Line 03	125	7	1.37932

Abbildung 8: Ergebnis der zweiten Variante des p-Tests mit mehreren Stichproben (PV), Homogenitätstest.

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistant (test procedure)>

Fenster "Assistant (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Klicke auf die Schaltlfächen in der angegebenen Folge:
    <diskrete Verteilungen> | < >2 Grundges. > |<Poisson>| <χ^2-Homogenität Test>
- Register <Daten>:
  - Klicke in der Spalte "aktiv" auf die Zellen der gewünschten drei oder mehr Merkmale, um diese auszuwählen.
  - Klicke auf den grünen Vorwärtspfeil (➔).

- Register <Test>:
    - Klicke auf das Taschenrechner-Symbol, um den Test auszuführen.

2.3.3 χ^2-Test – Binomialverteilung (>2 Stichproben, Anteil fehlerhafter Einheiten)

Dies ist ein Mehrstichprobentest für binomialverteilte Stichproben.

Für das folgende Datenbeispiel soll ein neuer Datensatz mit *drei* diskreten Merkmalen erstellt werden:

Multifunktionsleiste:

- Register <Datei> | <Neu> und "3 neue diskrete (attributive) Merkmale" erstellen.

Dateneingabe im Fenster "Merkmalsmaske"

Eingabefeld	Merkmal 1	Merkmal 2	Merkmal 3
Merkmalsnummer	PL 01	PL 02	PL 03
Merkmalsbezeichnung	Anzahl der fehlerhaften Einheiten (Linie 01)	Anzahl der fehlerhaften Einheiten (Linie 02)	Anzahl der fehlerhaften Einheiten (Linie 03)
Stichprobenumfang (K8500)	300	300	300
Stichprobenart (attributiv) (K8503)	konstant	konstant	konstant
Verteilung (K2011)	Binomialverteilung	Binomialverteilung	Binomialverteilung

Dateneingabe im Fenster "Wertemaske"

Spaltenname	Eingabewerte
Anzahl fehlerhafter Einheiten (Linie 01)	20
Anzahl fehlerhafter Einheiten (Linie 02)	10
Anzahl fehlerhafter Einheiten (Linie 03)	7

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
    - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
      <Diskrete Verteilungen> | < >2 Grundgesamtheiten > | <Binomial> | <χ^2-Test>

- Register <Daten>:
  - In der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der gewünschten drei oder mehr Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Zweimal auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Testen>:
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

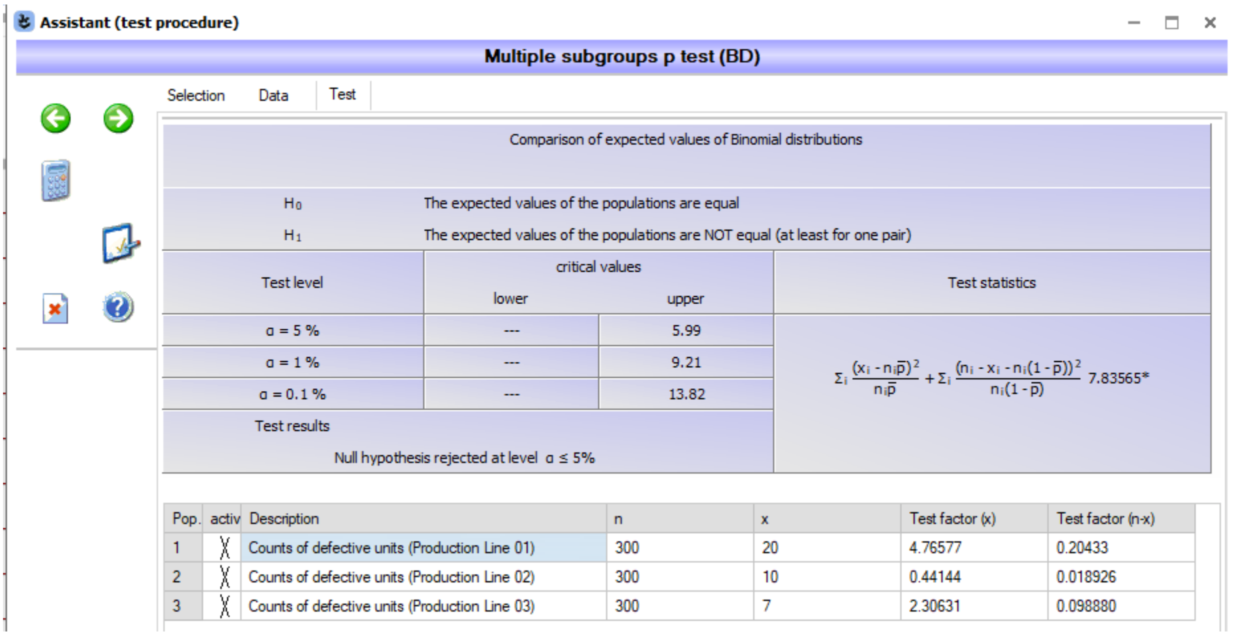


Abbildung 9: Fenster "Assistent (Testverfahren) mit dem Ergebnis des p-Tests. Der Test hat auf dem Signifikanzniveau α = 5 % bezüglich des Anteils fehlerhafter Einheiten Unterschiede zwischen den Produktionslinien erkannt.

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$p_i = konstant$	$p_i \neq p_j$ für mindestens ein Paar	$\sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - n_i\bar{p})^2}{n_i\bar{p}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{[n_i - x_i - n_i(1-\bar{p})]^2}{n_i(1-\bar{p})}$	$> \chi^2_{1-\alpha,k-1}$
Vereinfachte Version der Formel:		$\frac{1}{\bar{p}(1-\bar{p})} \sum_{i=1}^{k} n_i(p_i - \bar{p})^2$	$> \chi^2_{1-\alpha,k-1}$

mit

x_i	: Die *beobachtete* Anzahl der fehlerhaften Einheiten in der $i-ten$ Stichprobe.
n_i	: Der Stichprobenumfang der $i-ten$ Stichprobe.
$p_i = \frac{x_i}{n_i}$	: Der *beobachtete* Anteil fehlerhafter Einheiten in der $i-ten$ Stichprobe.
$\bar{p} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} p_i$	
k	: Die Anzahl der Stichproben.
$n_i\bar{p}$	: Die *erwartete* Anzahl der fehlerhaften Einheiten in der $i-ten$ Stichprobe.
$n_i - x_i$	: Die *beobachtete* Anzahl von OK-Einheiten in der $i-ten$ Stichprobe.
$n_i(1-\bar{p})$	: Die *erwartete* Anzahl von OK-Einheiten in der $i-ten$ Stichprobe.
$\chi^2_{1-\alpha,k-1}$	: Das $1-\alpha$ Quantil der Chi²-Verteilung für $k-1$ Freiheitsgrade.

Referenz

Ulrich GRAF, Hans-Joachim HENNING, Kurt STANGE, Peter-Theodor WILRICH
Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik
3rd Ausgabe
Springer 1998
ISBN 3-540-16901-6
Formel (6.10.12) auf Seite 187

3 Testverfahren für stetige Merkmale

Bevor ein Testverfahren im Fenster „Assistent (Testverfahren)“ ausgewählt werden kann, werden Daten benötigt. Der erste Schritt ist daher das Öffnen des gewünschten Datensatzes oder das Anlegen eines neuen Datensatzes.

3.1 Stetige Merkmale – Tests für eine Stichprobe

In diesem Abschnitt sind die Testverfahren für eine Stichprobe (stetiges Merkmal) beschrieben, die sich innerhalb des Fensters „Assistent (Testverfahren)“ befinden.

3.1.1 u-Test 1 (u-Test bei einer Stichprobe)

Mit diesem Testverfahren kann der Lageparameter μ mit einem *Sollwert* μ_{tar} vergleichen werden. Es wird davon ausgegangen, dass es sich bei dem ausgewerteten Datensatz um eine Zufallsstichprobe aus einer *normalverteilten* Grundgesamtheit handelt. Außerdem wird angenommen, dass der **Parameter σ** dieser Normalverteilung bereits **bekannt ist**. Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit einem stetigen Merkmal erzeugen oder laden.

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistenten (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Die folgenden Schaltflächen nacheinander anklicken:
<stetige Verteilungen> | <1 Grundgesamtheit> | <Normal verteilt> | <Lagetest> |
<σ bekannt>| <u-Test 1>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte „aktiv“ auf die Zelle des gewünschten Merkmals klicken, um es auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Planung>:
  - Hier kann der minimal erforderliche Stichprobenumfang berechnet werden oder aber die Power des Tests auf der Grundlage des aktuell verfügbaren Stichprobenumfangs beurteilt werden.
- Register <Testen>:
  - Den bekannten Wert der Standardabweichung oder - alternativ - den bekannten Wert der Varianz eingeben.
  - Den Sollwert für µ eingeben.
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

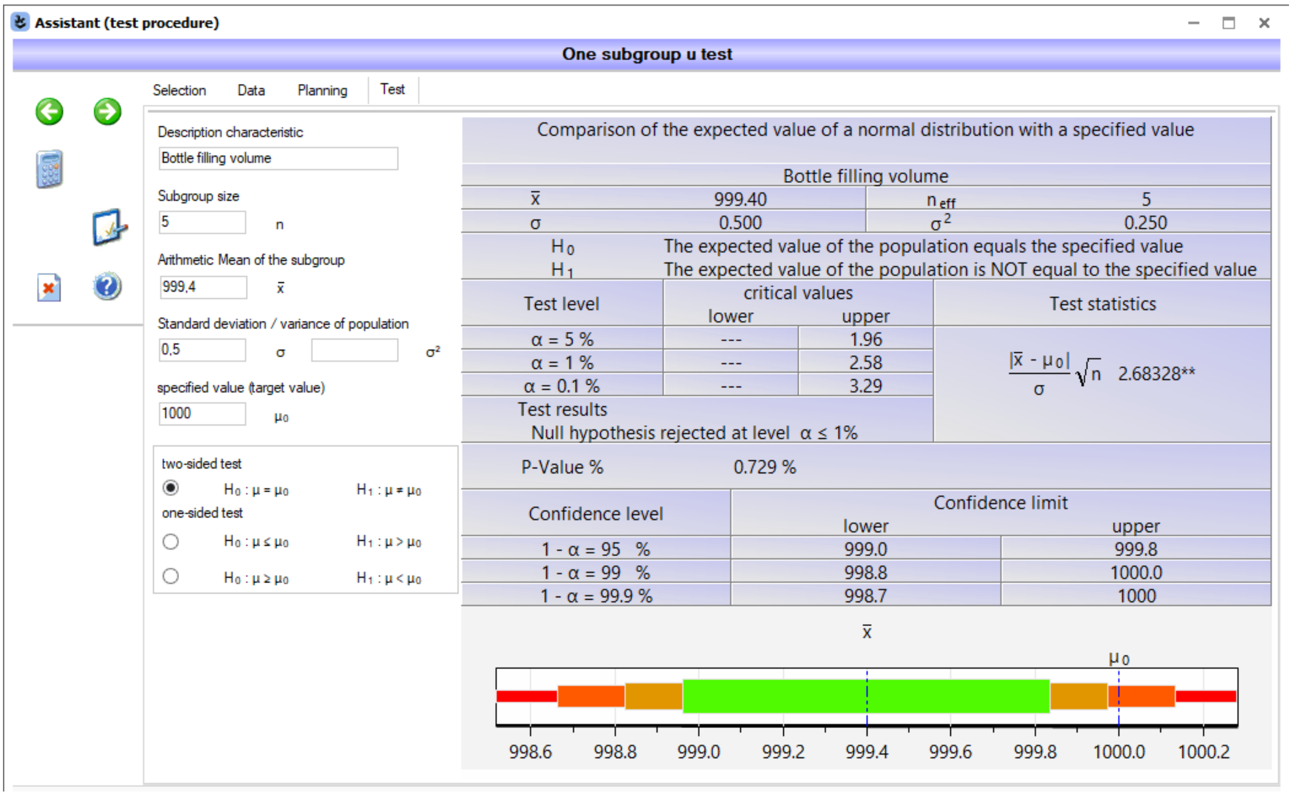


Abbildung 10: Fenster "Assistent (Testverfahren)" mit einem Ergebnis des u-Tests für eine Stichprobe (basierend auf einer Stichprobe mit den fünf Werten 999.5, 999.3, 998.9, 1000.4, 998.9).

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\frac{\lvert\bar{x} - \mu_0\rvert}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$	$> z_{1-\alpha/2}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$	$< z_{\alpha}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$	$> z_{1-\alpha}$

Mit

n : Der Stichprobenumfang.

σ : Bekannter Wert der Standardabweichung (Eingabewert)

μ_0 : Der Soll- oder Zielwert für den Parameter μ (Eingabewert).

$\bar{x}$: Der aus der Stichprobe berechnete Stichprobenmittelwert.

z_p : Das p-Quantil (inverse Verteilungsfunktion) der standardisierten Normalverteilung.

Referenz:

Ronald E. WARPOLE, Raymond H. MEYRS, Sharon L. MYERS, Keying YE
Probability and Statistics for Engineers & Scientists
Neunte Auflage (2017)
Pearson Education Ltd.
ISBN 9781292161365
Abschnitt 10.4 Single Sample: Tests Concerning a Single Mean (Seite 356 ff)
und Tabelle 10.3. auf Seite 370

3.1.2 t-Test 1 (1 Stichprobe, Mittelwertvergleich)

Mit diesem Testverfahren kann der Lageparameter μ mit einem *Sollwert* μ_{tar} verglichen werden. Es wird davon ausgegangen, dass es sich bei dem ausgewerteten Datensatz um eine Zufallsstichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit handelt. Die Werte der **Parameter μ und σ** dieser Normalverteilung sind beide **unbekannt**. Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit einem stetigen Merkmal erzeugen oder laden.

Den Test ausführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistenten (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
    <stetige Verteilungen> | <1 Grundgesamtheit> | <Normal verteilt> | <Lagetest> |
    <σ unbekannt>| <t-Test 1>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte „aktiv“ auf die Zelle des gewünschten Merkmals klicken, um es auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Planung>:
  - Hier kann der minimal erforderliche Stichprobenumfang berechnet werden oder aber die Power des Tests mit dem aktuell verfügbaren Stichprobenumfang bewertet werden.
- Register <Testen>:
  - Den Sollwert μ_{tar} in das Feld "Vorgegebener Wert (Zielwert)" eingeben
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

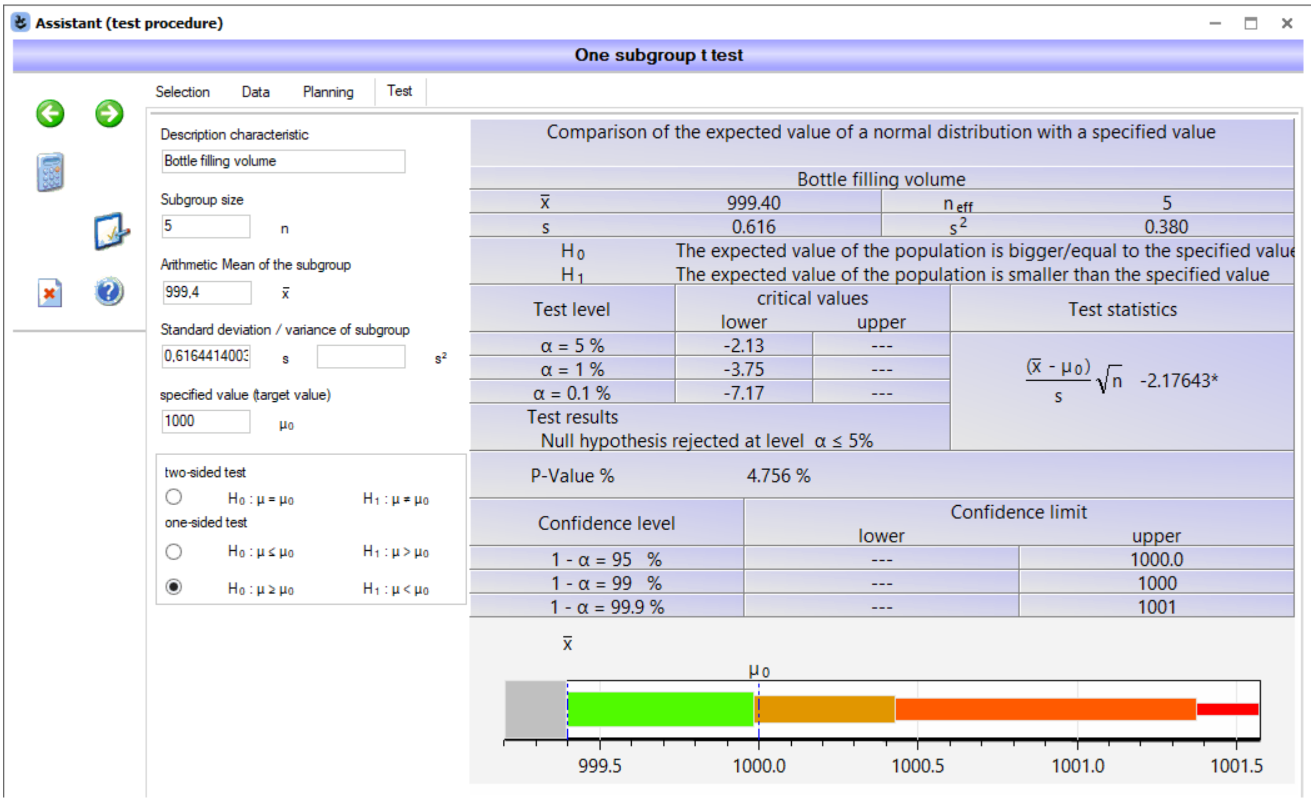


Abbildung 11: Fenster "Assistent (Testverfahren)" mit einem Ergebnis des t-Tests für eine Stichprobe (basierend auf einer Stichprobe mit den fünf Werten 999.5, 999.3, 998.9, 1000.4, 998.9).

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\frac{\lvert\bar{x} - \mu_0\rvert}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$	$> t_{1-\alpha/2,n-1}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$	$< t_{\alpha,n-1}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$	$> t_{1-\alpha,n-1}$

Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \leq \mu \leq \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu \leq \bar{x} + t_{1-\alpha;n-1}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\bar{x} - t_{1-\alpha;n-1}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \leq \mu$

Referenz:

Ronald E. WARPOLE, Raymond H. MEYRS, Sharon L. MYERS, Keying YE
Probability and Statistics for Engineers & Scientists
Neunte Auflage (2017)
Pearson Education Ltd.
ISBN 9781292161365
Abschnitt 10.4 One Samples: Tests Concerning a Single Mean (Seite 360 ff)
und Tabelle 10.3. auf Seite 370

3.1.3 Einstichproben χ^2-Test (1 Stichprobe, Vergleich der Varianz)

Dieses Testverfahren wird verwendet, wenn der Parameter σ (Standardabweichung) mit einem *Sollwert* für die Standardabweichung σ_{tar} verglichen werden soll. Es wird davon ausgegangen, dass der ausgewertete Datensatz eine Zufallsstichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit ist. Der Wert des Parameters σ ist *unbekannt*. Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit einem stetigen Merkmal erzeugen oder laden.

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistenten (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
    - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
      <stetige Verteilungen> | <1 Grundgesamtheit> | <Normal verteilt> |
      <Streuungstest> | <χ^2-Test>
- Register <Daten>:
    - In der Spalte „aktiv“ auf die Zelle des gewünschten Merkmals klicken, um es auszuwählen.
    - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Planung>:
    - Hier kann der minimal erforderliche Stichprobenumfang berechnet werden oder aber die Power des Tests mit dem aktuellen Stichprobenumfang beurteilt werden.
- Register <Testen>:
    - Den Sollwert für σ_0 in das Feld "Vorgegebener Wert (Sollwert)" eingeben
    - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
    - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

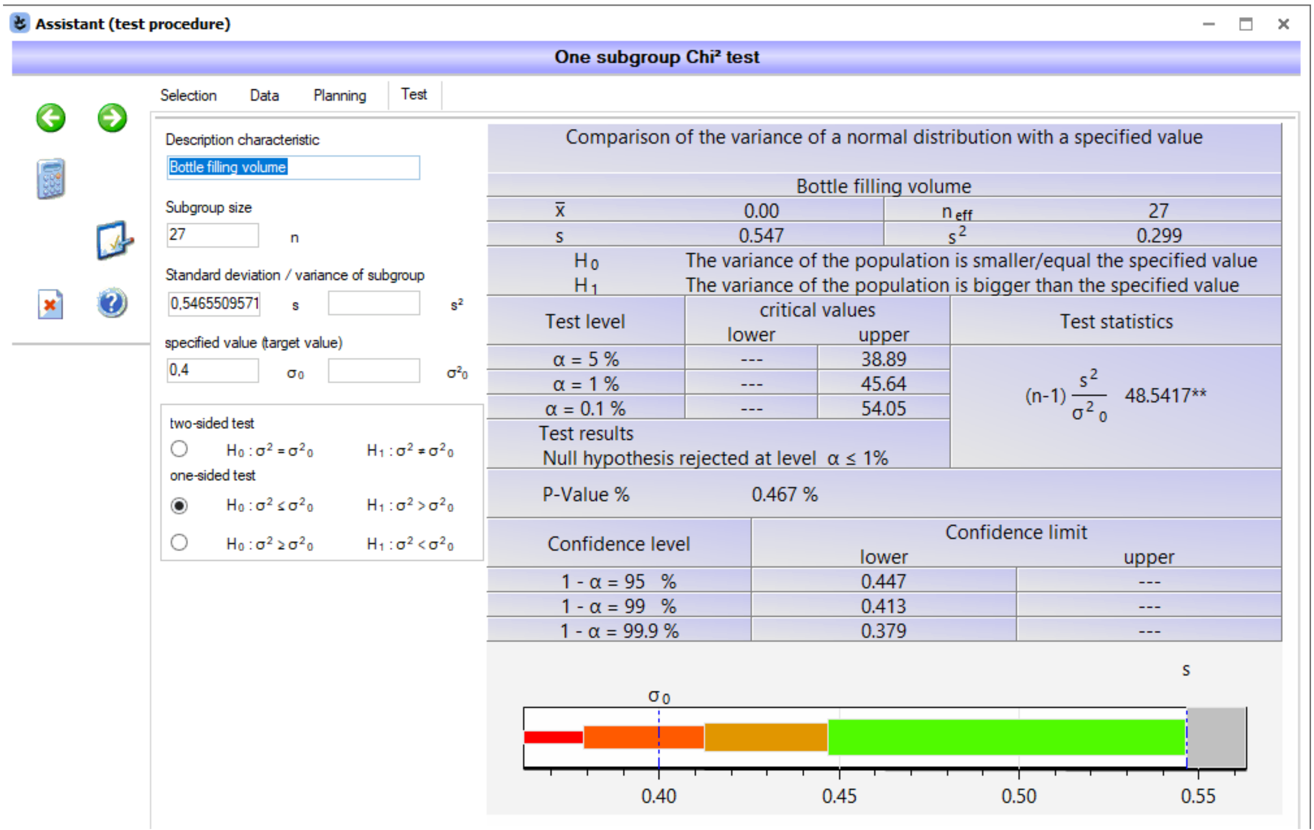


Abbildung 12: Fenster "Assistent (Testverfahren)" mit einem signifikanten Ergebnis für den Einstichproben-Tests χ^2-Test einer Abfüllanlage: Die Standardabweichung der Abfüllmenge ist systematisch größer als der hier gewählte Sollwert 0.4 ml.

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma \neq \sigma_0$	$(n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2}$	entweder: $< \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ oder: $> \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$
$\sigma \leq \sigma_0$	$\sigma > \sigma_0$	$(n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2}$	$> \chi^2_{1-\alpha,n-1}$
$\sigma \geq \sigma_0$	$\sigma < \sigma_0$	$(n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2}$	$< \chi^2_{\alpha,n-1}$

Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma \neq \sigma_0$	$s \times \sqrt{\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}{(n-1)}} \leq \sigma \leq s \times \sqrt{\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}{(n-1)}}$
$\sigma \leq \sigma_0$	$\sigma > \sigma_0$	$s \times \sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha;n-1}}{(n-1)}} \leq \sigma$
$\sigma \geq \sigma_0$	$\sigma < \sigma_0$	$\sigma \leq s \times \sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha;n-1}}{(n-1)}}$

Mit

n : Der Gesamtumfang der Stichprobe

s : Standardabweichung der Stichprobe

$\chi^2_{p;n-1}$: p-Quantil der Chi²-Verteilung für $df = n-1$ Freiheitsgraden.

Referenz:

Ronald E. WARPOLE, Raymond H. MEYRS, Sharon L. MYERS, Keying YE
Probability and Statistics for Engineers & Scientists
Neunte Auflage (2017)
Pearson Education Ltd.
ISBN 9781292161365
Abschnitt 10.10 One- and Two-sample Tests Concerning Variances (Seite 386 ff)

3.1.4 1 Stichproben Median-Test (Wilcoxon)

Dieses Testverfahren wird verwendet, wenn der Median $\tilde{\mu}$ mit einem *Soll-/Zielwert* für den Median $\tilde{\mu}_0$ verglichen werden soll. Es wird davon ausgegangen, dass es sich bei dem ausgewerteten Datensatz um eine Zufallsstichprobe aus einer symmetrisch verteilten Grundgesamtheit handelt, diese muss jedoch keine Normalverteilung sein. Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit einem stetigen Merkmal erzeugen oder laden.

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistenten (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken: <stetige Verteilungen> | <1 Grundgesamtheit> | <nicht normal verteilt> | <Lagetest> | <1 Stichproben Mediantest (Wilcoxon)>.
- Register <Daten>:
  - In der Spalte „aktiv“ auf die Zelle des gewünschten Merkmals klicken, um es auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔*)* klicken.
- Register <Testen>:
  - Den Sollwert für den Median in das Feld "Sollwert" eingeben.
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

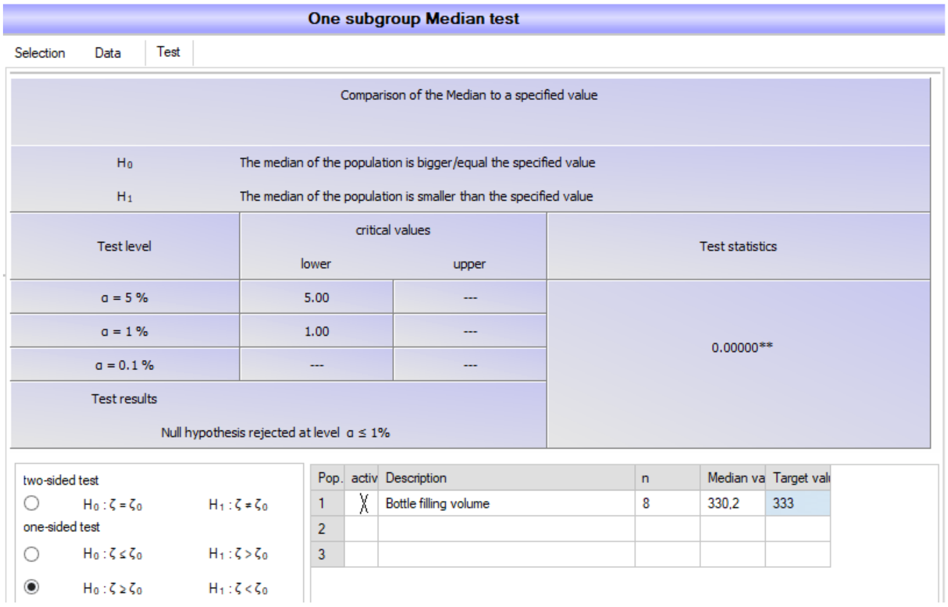


Abbildung 13: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis eines Einstichproben Mediantest (Wilcoxon) auf der Grundlage der folgenden Beispieldaten: 331.95, 328.82, 330.79, 329.64, 328.86, 331.16, 330.64, 329.76.

Berechnung der Prüfgröße des Tests und des kritischen Wertes

Zur Berechnung der *Prüfgröße wird* das folgende Verfahren verwendet:

1) Berechnung für jeden Wert der Stichprobe die Differenz: $d_i = x_i - \tilde{\mu}_0$
2) Berechnung der absoluten Werte dieser Differenzen: $d_{abs.i} = |d_i|$
3) Berechnung der Ränge r_i für die *Absolutwerte* der Unterschiede $d_{abs.i}$.
Bei mehrfach vorkommenden gleichen Werten wird der mittlere Rang für die jeweiligen Werte verwendet.
4) Übertragung der Vorzeichen aus den Differenzen, $d_i$von Schritt 1 auf die Ränge, $r_i$von Schritt 3.
Daraus ergeben sich Ränge mit positivem Vorzeichen r_i^+und Ränge mit negativen Vorzeichen r_i^-.
5) Summe der Ränge mit positiven Vorzeichen $W_{(+)}$ (falls vorhanden):

$$W_{(+)} = \sum_{i=1}^{n_+} r_i^+$$

6) Summe der *Absolutwerte* der Ränge *mit negativem* Vorzeichen $W_{(-)}$ (falls vorhanden):

$$W_{(-)} = \sum_{i=1}^{n_-} |r_i^-|$$

7) Berechnung der Prüfgröße in Abhängigkeit von der Alternativhypothese und Auswahl der kritischen Werte für das entsprechende Signifikanzniveau:

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$	$\tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}_0$	$W_{(+)}\ wenn\ W_{(+)} < W_{(-)}\ or$ $W_{(-)}\ wenn\ W_{(-)} < W_{(+)}$	$< W_{n,\frac{\alpha}{2}}$
$\tilde{\mu} \leq \tilde{\mu}_0$	$\tilde{\mu} > \tilde{\mu}_0$	$W_{(-)}$	$< W_{n,\alpha}$
$\tilde{\mu} \geq \tilde{\mu}_0$	$\tilde{\mu} < \tilde{\mu}_0$	$W_{(+)}$	$< W_{n,\alpha}$

mit:

$\tilde{\mu}_0$: Der Soll-/Zielwert des Medians (Eingabewert).

$W_{(-)}$: Die Summe der Absolutwerte der Ränge *mit negativem Vorzeichen*.

$W_{(+)}$: Die Summe der Ränge *mit positivem Vorzeichen*.

x_i : Der $i-$ te Wert der Stichprobendaten.

$W_{n,\frac{\alpha}{2}}$: Untere kritische Wert der Summe der vorzeichenbehafteten Ränge für die Wahrscheinlichkeit $\frac{\alpha}{2}$.

$W_{n,\alpha}$: Unterer kritische Wert der Summe der vorzeichenbehafteten Ränge für die Wahrscheinlichkeit α.

Auf dem ersten Blick mag es überraschen, dass die Software für den zweiseitigen Fall entweder $W_{(+)}$ *oder* $W_{(-)}$ für die Prüfgröße verwendet. Das Programm übernimmt den *kleineren* der beiden Werte als Prüfgröße. Dies ist möglich, da die Verteilung der Prüfgröße eine symmetrische Verteilung um den Erwartungswert $E\left(W_{(+)}\right) = \frac{n \times (n+1)}{4}$ ist und die Summe aller vorzeichenbehafteten Ränge folgende Bedingung erfüllt:

$$W_{(+)} + W_{(-)} = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

Dies impliziert:

- Wenn $W_{(+)}$ klein ist, dann ist $W_{(-)}$ groß.
- Wenn $W_{(-)}$ klein ist, dann ist $W_{(+)}$ groß.

Für kleine Stichprobengrößen $(6 \leq n \leq 50)$ wird der untere kritischen Wert $W_{n,\alpha}$ oder $W_{n,\frac{\alpha}{2}}$ aus einer Tabelle entnommen (exakte Werte). Für Stichprobenumfänge $n > 50$ berechnet die Software die unteren kritischen Werte mit der folgenden Näherungsformel:

$$W_{n,\alpha} = \frac{n \times (n+1)}{4} - z_{1-\alpha} \times \sqrt{\frac{1}{24} \times n \times (n+1) \times (2n+1)}$$

n Der Gesamtumfang der Stichprobe

$z_{1-\alpha}$: Das $1-\alpha$ Quantil (inverse Verteilungsfunktion) der standardisierten Normalverteilung (einseitiger Fall). Für den zweiseitigen Fall verwendet die Software das $1-\frac{\alpha}{2}$ Quantil.

Bemerkung

In der derzeit implementierten Version des Testverfahrens erfolgt im Falle von Bindungen (Bindung: mehrfach vorkommende gleiche Werte) keine Korrektur der Prüfgröße und des kritischen Wertes. Aus diesem Grund sollte der Test möglichst nicht verwendet werden, wenn für die Stichprobendaten bekannt ist, dass diese eine geringe Auflösung haben (was zu mehrfach gleichen Werten führt).

Referenz:

Ronald E. WARPOLE, Raymond H. MEYRS, Sharon L. MYERS, Keying YE
Probability and Statistics for Engineers & Scientists
Neunte Auflage Edition (2017)
Pearson Education Ltd.
ISBN 9781292161365
Abschnitt 16.2 Signed-Rank Test (Seite 680 ff)
Tabelle A.16 Critical values for the Signed-Rank Test (Seite 779)

3.2 Stetige Merkmale – Tests für zwei Stichproben

In diesem Abschnitt sind die Testverfahren für zwei Stichproben (stetige Merkmale) beschrieben, die im Fenster „Assistent (Testverfahren)“ enthalten sind.

3.2.1 t-Test P (EW) (2 gepaarte Stichproben, Mittelwertvergleich)

Dies ist eine Variante des *t-Test mit zwei Stichproben für gepaarte (=abhängige) Stichproben,* die beide aus normalverteilten Grundgesamtheiten stammen sollten. Zu beachten ist, dass jeder Wert in der ersten Stichprobe gepaart ist mit einem Partnerwert in der zweiten Stichprobe. Als anschauliches Beispiel möge das Gewicht von 10 Personen vor und nach einer Abmagerungskur dienen: In diesem Fall besteht die erste Stichprobe aus den Gewichten "vor der Abmagerungskur" und die zweite Stichprobe aus den Gewichten derselben Personen "nach der Abmagerungskur". Bei der Eingabe der Daten ist auf die zeilenweise Paarung der Gewichte für jede Person zu achten:

	Weight before diet	Weight after diet
1	71,000	71,000
2	70,000	67,000
3	69,000	68,000
4	76,000	76,000
5	79,000	77,000
6	82,000	81,000
7	89,000	88,000
8	78,000	76,000
9	74,000	73,000
10	77,000	76,000

Abbildung 14: Ausschnitt aus dem Fenster „Merkmalsmaske“ mit Beispieldaten für das Körpergewicht von 10 Personen vor und nach einer Abmagerungskur. Die Werte in einer Zeile gehören jeweils zu ein und derselben Person.

Mit dem Test wird geprüft, ob sich die beiden Lageparameter μ_1 und μ_2 signifikant unterscheiden.

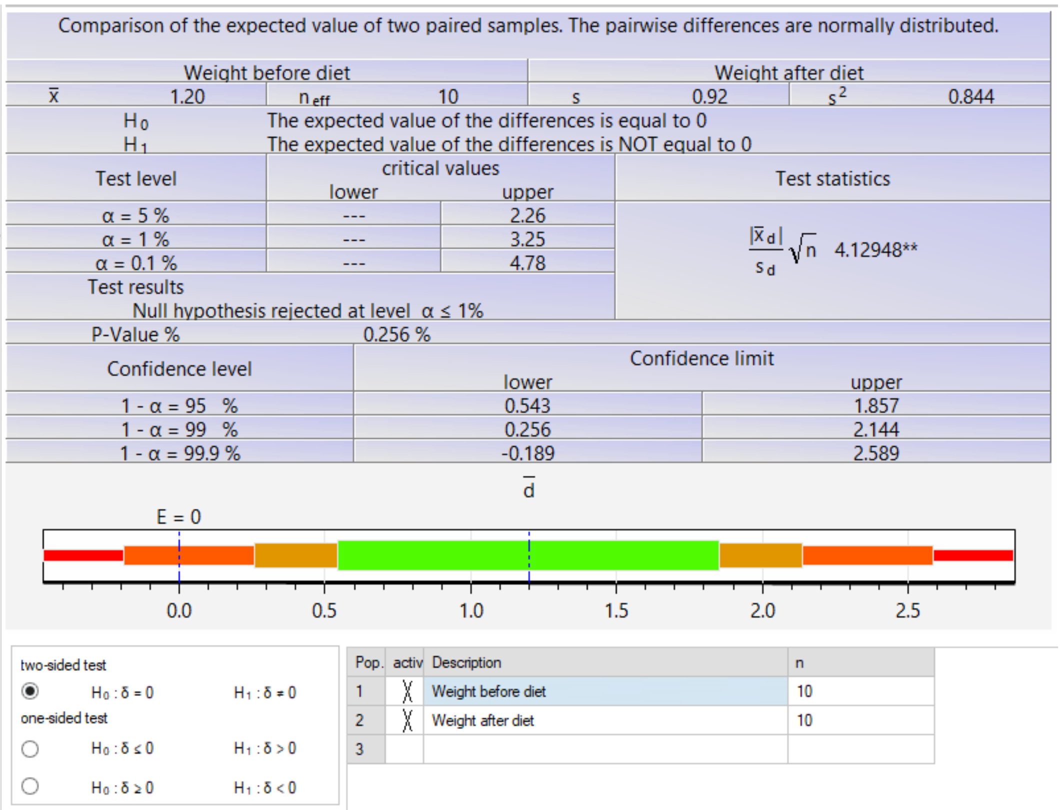
Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
    - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
      <stetige Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
      <Lagetests> | <paarweise verbunden> | <t-Test P (EW)>.
- Register <Daten>:
    - In der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der zwei gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
    - Anschließend zweimal auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Planung>:
    - Hier kann der Mindeststichprobenumfang berechnet werden oder aber die Power des Tests mit dem aktuell verfügbaren Stichprobenumfang beurteilt werden.
- Register <Testen>:
    - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
    - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.



Comparison of the expected value of two paired samples. The pairwise differences are normally distributed.							
Weight before diet				Weight after diet			
x̄	1.20	n eff	10	s	0.92	s²	0.844
H₀	The expected value of the differences is equal to 0						
H₁	The expected value of the differences is NOT equal to 0						

Test level	critical values lower	critical values upper	Test statistics
α = 5 %	---	2.26	$\frac{\lvert\bar{x}_d\rvert}{s_d}\sqrt{n}$ 4.12948**
α = 1 %	---	3.25	
α = 0.1 %	---	4.78	
Test results: Null hypothesis rejected at level α ≤ 1%			
P-Value %	0.256 %		

Confidence level	Confidence limit lower	Confidence limit upper
1 - α = 95 %	0.543	1.857
1 - α = 99 %	0.256	2.144
1 - α = 99.9 %	-0.189	2.589

Pop.	activ	Description	n
1	X	Weight before diet	10
2	X	Weight after diet	10
3			

Abbildung 15: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis des t-Tests für gepaarte Stichproben (t-Test P (SV)

Berechnung der Prüfgröße und des kritischen Wertes

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\Delta\mu = 0$	$\Delta\mu \neq 0$	$t_{2\ sided} = \frac{\lvert\bar{d}\rvert}{\left(\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right)}$	$> t_{1-\alpha/2;n-1}$
$\Delta\mu \leq 0$	$\Delta\mu > 0$	$t_{1\ sided} = \frac{\bar{d}}{\left(\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right)}$	$> t_{1-\alpha;n-1}$
$\Delta\mu \geq 0$	$\Delta\mu < 0$	$t_{1\ sided} = \frac{\bar{d}}{\left(\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right)}$	$< t_{\alpha,n-1}$

Mit

$d_i = x_{1.i} - x_{2.i}$: Die Differenz des iPaar von Werten der Stichprobe, $i = 1\ to\ n$

$\bar{d}$: : Der Mittelwert der Differenzen

n : Die Anzahl der Unterschiede (=Größe einer Stichprobe)

s_d : Die Standardabweichung der Differenzen

$t_{p;n-1}$: Das p-Quantil der t-Verteilung für $df = n - 1$ Freiheitsgraden.

Berechnung des Vertrauensbereiches für die Differenz $\Delta\mu$

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereich
$\Delta\mu = 0$	$\Delta\mu \neq 0$	$\bar{d} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s_d}{\sqrt{n}} \leq \Delta\mu \leq \bar{d} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s_d}{\sqrt{n}}$
$\Delta\mu \leq 0$	$\Delta\mu > 0$	$\bar{d} + t_{\alpha,n-1}\frac{s_d}{\sqrt{n}} \leq \Delta\mu$
$\Delta\mu \geq 0$	$\Delta\mu < 0$	$\Delta\mu \leq \bar{d} + t_{1-\alpha,n-1}\frac{s_d}{\sqrt{n}}$

Referenz:

Ronald E. WARPOLE, Raymond H. MEYRS, Sharon L. MYERS, Keying YE
Probability and Statistics for Engineers & Scientists
Neunte Auflage (2017)
Pearson Education Ltd.
ISBN 9781292161365
Abschnitt 10.5 Two Samples: Tests on Two Means (Seiten. 365 ff)
und Tabelle 10.3. auf Seite 370.

3.2.2 t-Test P (2 gepaarte Stichproben, Mittelwertvergleich)

Dies ist eine Variante des *t-Tests mit zwei Stichproben für gepaarte Stichproben*. Diese Variante verwendet nur ein einziges Merkmal: Es wird davon ausgegangen, dass die Differenzen bereits berechnet wurde. Das Beispiel von oben wird erweitert um eine Spalte "Differenz". Das Verfahren "t-Test P" wird nur mit den Werten in der Spalte "Differenz" durchgeführt. Die Berechnungsschritte sind die gleichen wie zuvor.

Körpergewicht in [kg]		
vor der Abmagerungskur	nach der Abmagerungskur	Unterschied
71	71	0
70	67	3
69	68	1
76	76	0
79	77	2
82	81	1
89	88	1
78	76	2
74	73	1
77	76	1

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnis> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)"

- Register <Auswahl>:
  - Nacheinander auf die folgenden Schaltflächen klicken:
    <stetige Verteilung> | <2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
    < Lagetest> | <paarweise verbunden> | <t-Test P>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der beiden gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Planung>:
  - Hier kann der Mindeststichprobenumfang berechnet werden oder aber die Power des Tests mit dem aktuell verfügbaren Stichprobenumfang beurteilt werden.

- Register <Testen>:
    - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen
    - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

Die Berechnung der Teststatistik und der Konfidenzgrenzen entspricht dem Verfahren des t-Tests für gepaarte Stichproben mit zwei Stichproben, "t-Test P (SV)".

3.2.3 u-Test 2 (2 Stichproben, Mittelwertvergleich)

Der Zwei-Stichproben u-Test setzt zwei unabhängige und zufällige Stichproben aus normalverteilten Grundgesamtheiten voraus, bei denen die **Standardabweichung** σ für beide Grundgesamtheiten **bekannt** ist. Dieser Test prüft auf einen Unterschied zwischen den beiden Lageparametern μ_1 und μ_2. Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
    <stetige Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
    <Lagetest> | <σ_1, σ_2 bekannt> | <u-Test 2>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der zwei gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Planung>:
  - Hier kann der mindestens erforderliche Stichprobenumfang berechnet werden oder aber mit dem aktuell verfügbaren Stichprobenumfang die Power des Tests beurteilt werden.
- Register <Testen>:
  - Die bekannten Werte der Standardabweichungen eingeben: Felder σ_1 und σ_2.
  - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

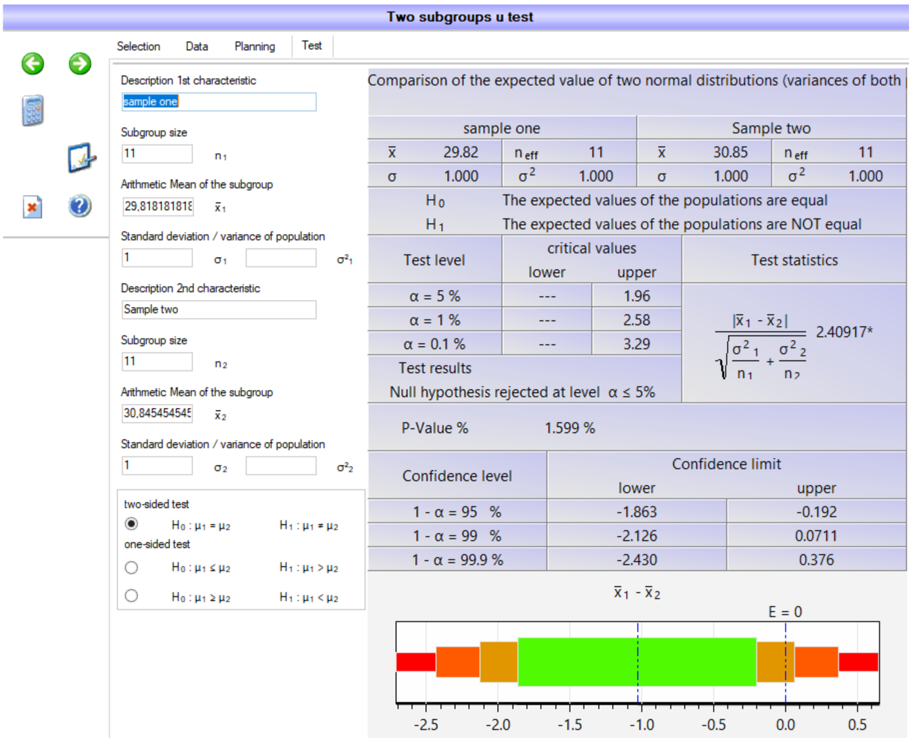


Abbildung 16: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis eines u-Tests mit zwei Stichproben.

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$z_{2\,sided} = \frac{\lvert\bar{x}_1 - \bar{x}_2\rvert}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$> z_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$z_{1\,sided} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$> z_{1-\alpha}$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$z_{1\,sided} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$< z_{\alpha}$

wobei

n_i : Stichprobenumfang der $i$ten Stichprobe.

$\bar{x}_i$: Stichprobenmittelwert der $i - ten$ Stichprobe.

σ_1, σ_2 : Eingabewerte für die bekannten Standardabweichungen.

z_p p-Quantil (inverse Verteilungsfunktion) der standardisierten Normalverteilung.

Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \Delta\mu \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)+z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)+z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \Delta\mu$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\Delta\mu \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)+z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

Referenz:

Wilfried J. DIXON, Frank J. MASSEY Jr.
Einführung in die statistische Analyse
Vierte Auflage (1985)
McGraw-Hill
Kapitel 8.4
Seite 126

3.2.4 t-Test 2 (2 Stichproben, Mittelwertvergleich)

Der t-Test mit zwei Stichproben geht von zwei unabhängigen und zufälligen Stichproben aus, die aus zwei normalverteilten Grundgesamtheiten entnommen wurden, wobei die Standardabweichungen σ beider Grundgesamtheiten *unbekannt* sind. Wie der Name des Tests andeutet, erfordert dieser Test zwei Stichprobendaten (stetige Merkmale). Dieser Test prüft auf einen Unterschied zwischen den beiden Lageparametern μ_1 und μ_2. Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
    <stetige Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
    <Lagetest> | <σ_1, σ_2 unbekannt> | <t-Test 2>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der gewünschten zwei Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend zweimal auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Testen>:
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

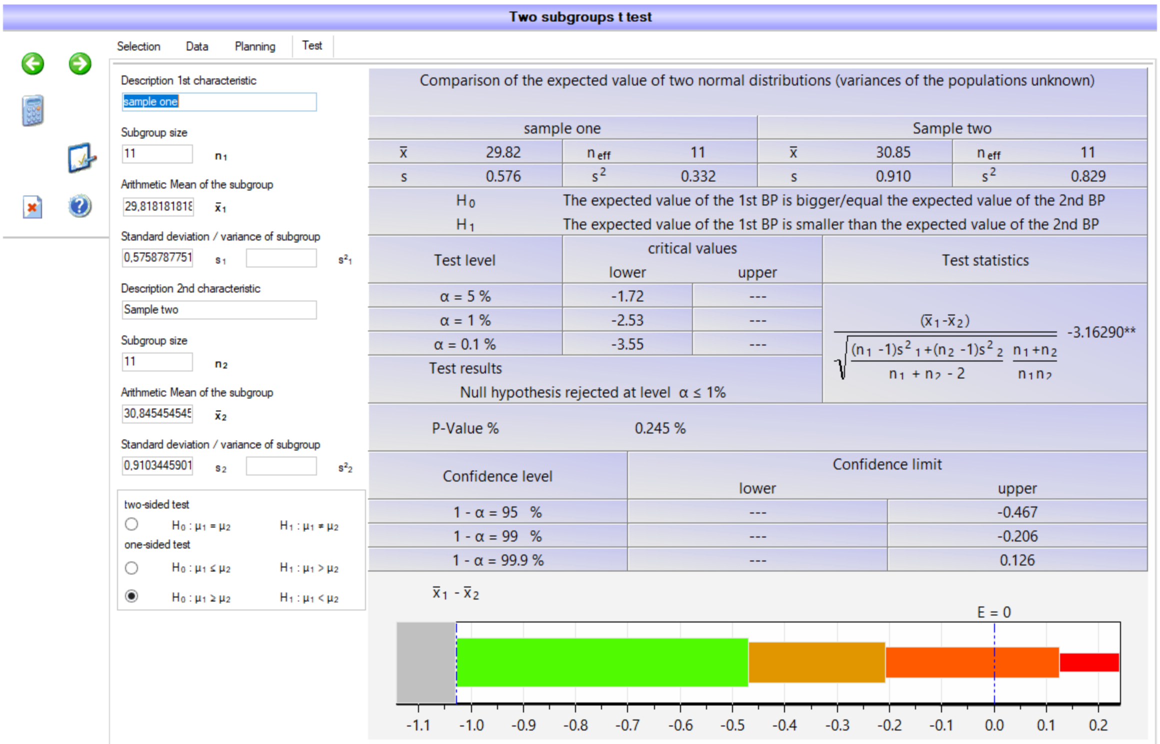


Abbildung 17: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis eines t-Tests mit zwei Stichproben.

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (Fall: gleiche Varianzen)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$t_{2\ sided} = \dfrac{\lvert\bar{x}_1 - \bar{x}_2\rvert}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$> t_{1-\alpha/2,n_1+n_2-2}$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$t_{1\ sided} = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$> t_{1-\alpha,n_1+n_2-2}$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$t_{1\ sided} = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$< t_{\alpha,n_1+n_2-2}$

wobei

s_p : Die gepoolte Standardabweichung der beiden Stichproben

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

n_i : Der Stichprobenumfang der iStichprobe mit $i = 1,2$

$\bar{x}_i$: Der Mittelwert der iStichprobe mit $i = 1,2$

s_i^2 : Die Varianz der Stichprobe der iStichprobe mit $i = 1,2$

t_{p,n_1+n_2-2} : Das p-Quantil der t-Verteilung mit $df = n_1 + n_2 - 2$ Freiheitsgraden.

Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen (Fall: gleiche Varianzen)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\frac{\alpha}{2},df} \times s_{\Delta\bar{x}} \leq \Delta\mu \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \times s_{\Delta\bar{x}}$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha,df} \times s_{\Delta\bar{x}} \leq \Delta\mu$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\Delta\mu \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{1-\alpha,df} \times s_{\Delta\bar{x}}$

mit

$df = n_1 + n_2 - 2$: Freiheitsgrade

$$s_{\Delta\bar{x}} = s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (Fall: ungleiche Varianzen)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$t_{2\ sided} = \frac{\lvert\bar{x}_1 - \bar{x}_2\rvert}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	$> t_{1-\alpha/2,\nu}$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$t_{1\ sided} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	$> t_{1-\alpha,\nu}$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$t_{1\ sided} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	$< t_{\alpha,\nu}$

ν : Modifizierte Freiheitsgrade

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1 - 1)} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2 - 1)}}$$

Berechnung der Vertrauensbereiche (Fall: ungleiche Varianzen)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\frac{\alpha}{2},\nu} \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \leq \Delta\mu \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{1-\frac{\alpha}{2},\nu} \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha,\nu} \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \leq \Delta\mu$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\Delta\mu \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{1-\alpha,\nu} \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Referenz:

Ronald E. WARPOLE, Raymond H. MEYRS, Sharon L. MYERS, Keying YE
Wahrscheinlichkeit und Statistik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Neunte Auflage (2017)
Pearson Education Ltd.
ISBN 9781292161365
Kapitel 10.5 Tests auf zwei Mittelwerte (Seite. 363 ff)
Tabelle 10-3 Tests bezüglich der Mittelwerte (Seite 370)

3.2.5 F-Test (2-Stichproben, Vergleich der Varianzen)

Der 2-Stichproben-F-Test setzt zwei unabhängige Stichproben aus normalverteilten Grundgesamtheiten voraus. Das Verfahren prüft auf einen Unterschied zwischen den beiden Varianzen σ_1^2 und σ_2^2. Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
    - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
      <stetige Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
      <Streuungstest> | <F-Test>.
- Register <Daten>:
    - In der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der gewünschten zwei Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
    - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Planung>:
    - Hier kann der mindestens erforderliche Stichprobenumfang ermittelt werden oder aber mit dem verfügbaren Stichprobenumfang die Power des Tests beurteilt werden.
- Register <Testen>:
    - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen
    - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen

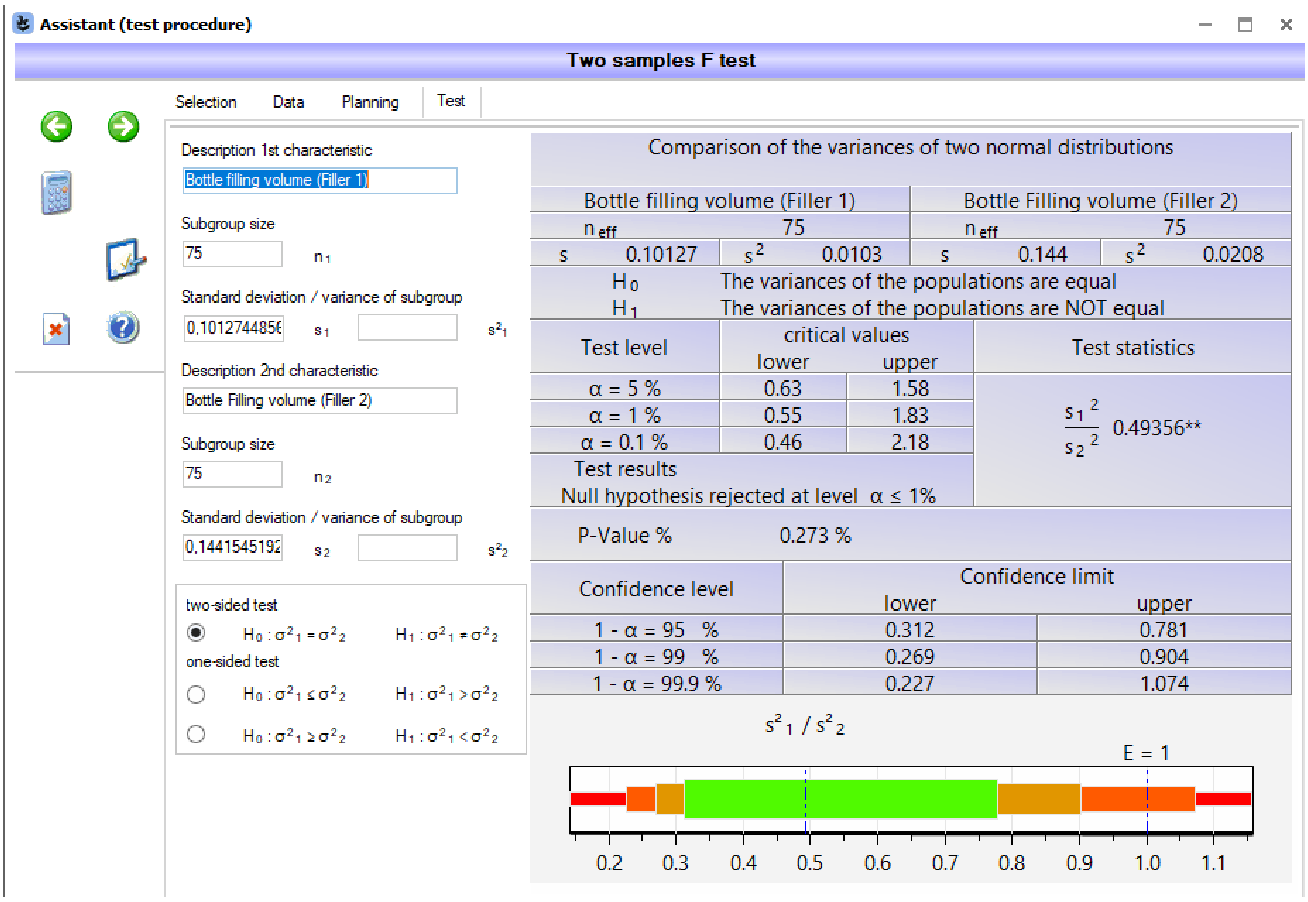


Abbildung 18: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt exemplarisch ein Ergebnis für den Zweistichproben F-Test – Die Varianzen des Füllvolumens zweier Füllköpfe sind signifikant verschieden.

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\sigma_1 = \sigma_2$	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	$Entweder\ > F_{1-\alpha/2;n_1-1,n_2-1}$ $oder < F_{\alpha/2;n_1-1,n_2-1}$
$\sigma_1 \leq \sigma_2$	$\sigma_1 > \sigma_2$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	$> F_{1-\alpha;n_1-1,n_2-1}$
$\sigma_1 \geq \sigma_2$	$\sigma_1 < \sigma_2$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	$< F_{\alpha;n_1-1,n_2-1}$

Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\sigma_1 = \sigma_2$	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}} \times \frac{s_1^2}{s_2^2} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}} \times \frac{s_1^2}{s_2^2}$
$\sigma_1 \leq \sigma_2$	$\sigma_1 > \sigma_2$	$\frac{1}{F_{1-\alpha,n_1-1,n_2-1}} \times \frac{s_1^2}{s_2^2} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$
$\sigma_1 \geq \sigma_2$	$\sigma_1 < \sigma_2$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{1}{F_{\alpha,n_1-1,n_2-1}} \times \frac{s_1^2}{s_2^2}$

Mit:

s_1^2 : Varianz der ersten Stichprobe

s_2^2 : Varianz der zweiten Stichprobe

n_1 : Stichprobenumfang der ersten Stichprobe

n_2 : Stichprobenumfang der zweiten Stichprobe

F_{p,n_1-1,n_2-1} : p-Quantil der F-Verteilung für $df_1 = n_1 - 1$ und $df_2 = n_2 - 1$ Freiheitsgrade.

3.2.6 Differenzen-Median-Test (2 gepaarte Stichproben, Vergleich Median)

Dieses Testverfahren setzt zwei **gepaarte** Stichproben voraus. Ein ebenfalls weit verbreiteter Name für dieses Testverfahren ist *Wilcoxon-Vorzeichen-Rank-Test für zwei verbundene Stichproben.* Dieser Test prüft auf einen Unterschied zwischen den beiden Medianwerten $\tilde{\mu}_1$ und $\tilde{\mu}_2$. Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
    - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
      <Stetige Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <Nicht normal verteilt> |
      <Lagetest> | <paarweise verbunden> | <ζ-Test P>
- Register <Daten>:
    - In der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der zwei gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
    - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Testen>:
    - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
    - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

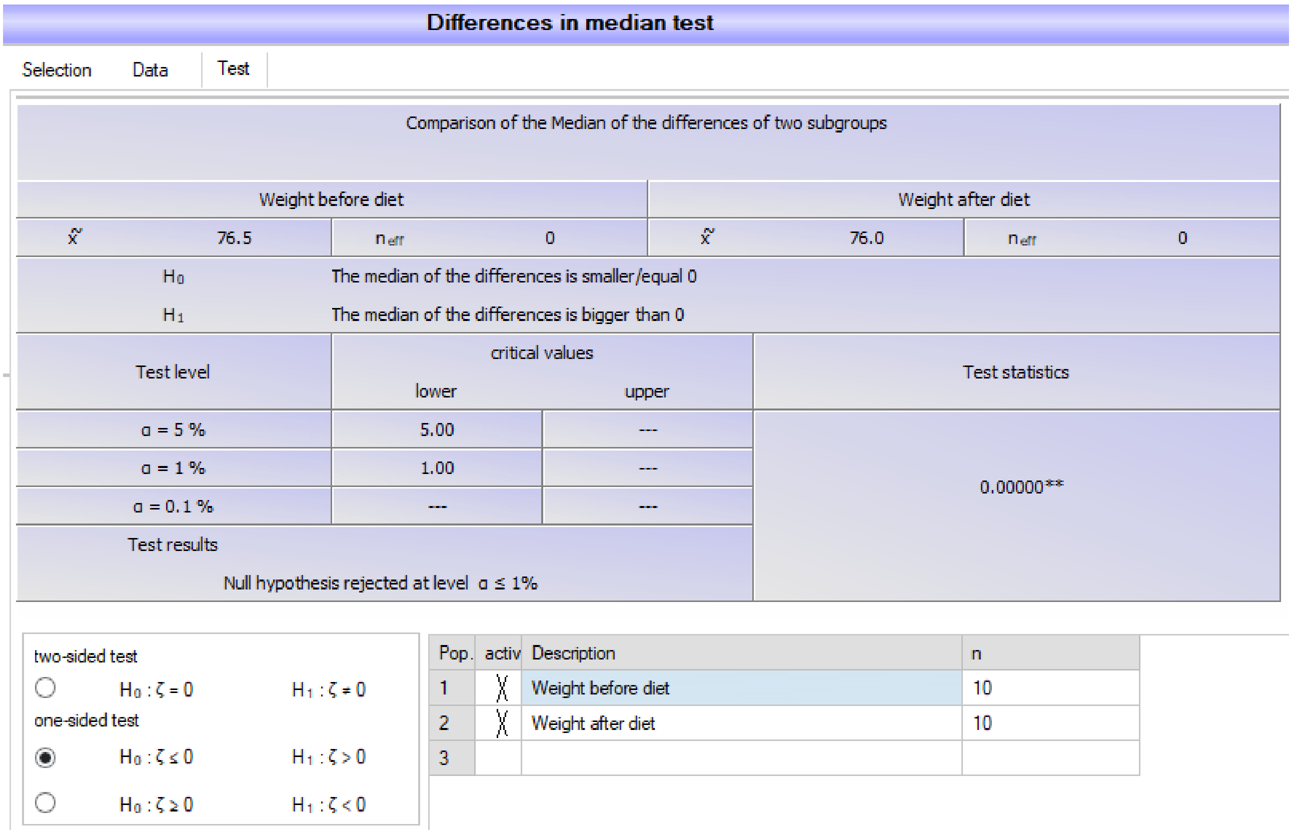


Abbildung 19: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis eines Wilcoxon-Signed-Rank-Tests mit zwei Stichproben.

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

Um die Prüfgröße zu erhalten, werden die folgenden Berechnungsschritte durchgeführt:

1) Berechnung der Differenzen:
   $d_i = x_{1.i} - x_{2.i}; i = 1, 2, \ldots, n$
2) Berechnung der absoluten Werte der Differenzen:
   $|d_i|, i = 1,2, \ldots, n$

Die übrigen Berechnungsschritte und Testentscheidungen sind die gleichen wie beim Wilcoxon-Signed-Rank-Test mit einer Stichprobe. Siehe Abschnitt 3.1.4 auf Seite 34.

3.2.7 Mann-Whitney U-Test (2 Stichproben, Vergleich Median)

Dieses Testverfahren geht von zwei *unabhängigen* Stichproben aus. Diese Prozedur prüft auf eine Differenz zwischen den beiden Medianwerten $\tilde{\mu}_1$ und $\tilde{\mu}_2$. Der Test erfordert Stichprobendaten von zwei stetigen Merkmalen, die aus zwei Grundgesamtheiten mit derselben Form stammen (keine Anforderung für normalverteilte Grundgesamtheiten). Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
    <stetige Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <Nicht normal verteilt> |
    <Lagetest> | <unabhängige Stichprobe> | <U-Test>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der beiden gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Testen>:
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test uaszuführen.

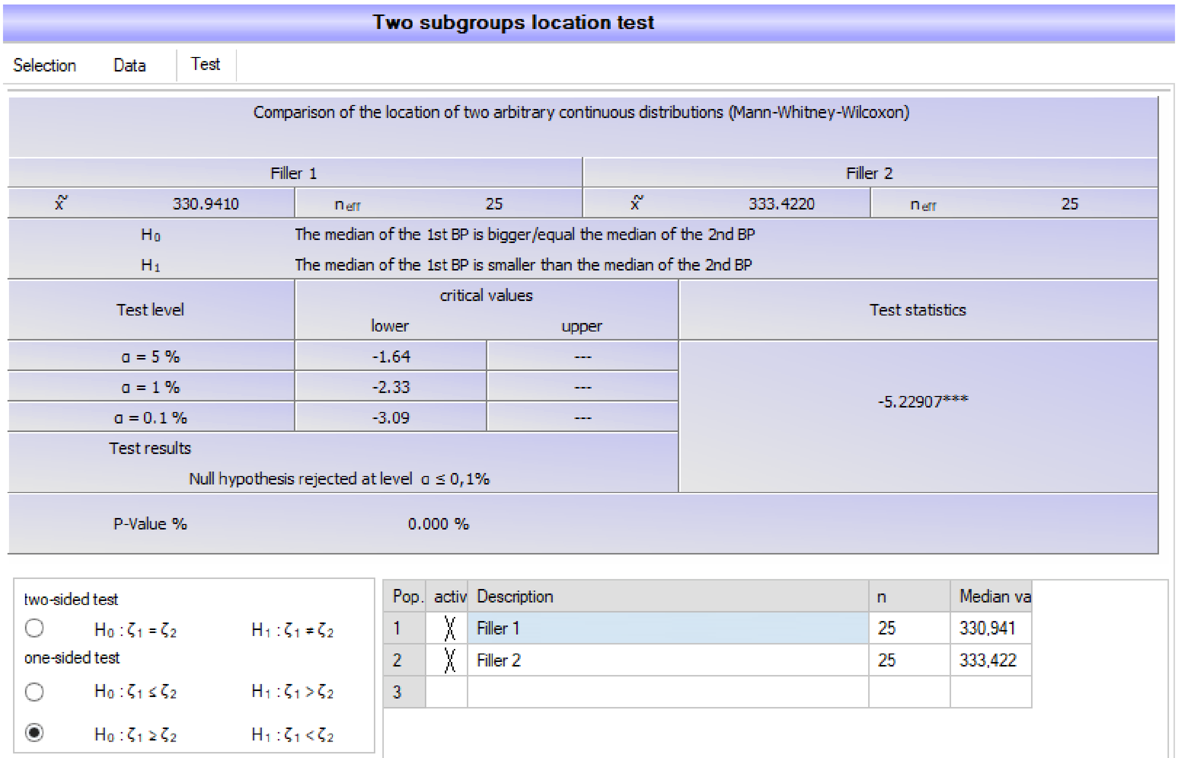


Abbildung 20: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis eines Mann-Whitney-U-Tests mit zwei Stichproben.

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

Die folgenden Berechnungsschritte werden verwendet, um die Prüfgröße zu ermitteln:

1) Bestimmen des Stichprobenumfangs der beiden Stichproben: n_1 und n_2.
2) Kombinieren beider Stichproben zu einer Gesamt-Stichprobe.
3) Berechnung der Ränge für die kombinierte Gesamt-Stichprobe.
4) Bei Bindungen (Bindungen = derselbe Wert kommt in der Stichprobe mehrfach vor) wird der mittlere Rang den betreffenden Werten zugeordnet. Die Häufigkeit der Bindungen wird für jede Bindungsgruppe ausgezählt.
5) Berechnung der *Summe der Ränge* für die Werte, die zur ersten Stichprobe gehören: R_1
6) Berechnung der *Summe der Ränge* für die Werte, die zur zweiten Stichprobe gehören: R_2
7) Berechnung der Statistik des Tests:

   $$U_1 = n_1 \times n_2 + \frac{n_1 \times (n_1 + 1)}{2} - R_1$$

   $$U_2 = n_1 \times n_2 + \frac{n_2 \times (n_2 + 1)}{2} - R_2$$

   wobei

   R_1 : Summe der Ränge der ersten Stichprobe.

   R_2 : Summe der Ränge der zweiten Stichprobe.

   n_1 : Stichprobenumfang der ersten Stichprobe.

   n_2 : Stichprobenumfang der zweiten Stichprobe.

   Berechnung $U = min\{U_1; U_2\}$. Dies ist nur eine vorläufige Prüfgröße, die zur Berechnung der endgültigen transformierten Prüfgröße verwendet wird:

8) Berechnen der endgültigen transformierten Prüfgröße:

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (Fall: keine Bindungen vorhanden)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$	$\tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2$	$z = \dfrac{\left\lvert U - \frac{n_1 \times n_2}{2} \right\rvert}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2 \times (N+1)}{12}}}$	$> z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\tilde{\mu}_1 \leq \tilde{\mu}_2$	$\tilde{\mu}_1 > \tilde{\mu}_2$	$z = \dfrac{U - \frac{n_1 \times n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2 \times (N+1)}{12}}}$	$> z_{1-\alpha}$
$\tilde{\mu}_1 \geq \tilde{\mu}_2$	$\tilde{\mu}_1 < \tilde{\mu}_2$	$z = \dfrac{U - \frac{n_1 \times n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2 \times (N+1)}{12}}}$	$< z_{\alpha}$

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (Fall: Bindungen vorhanden)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$	$\tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2$	$z = \dfrac{\left\lvert U - \frac{n_1 \times n_2}{2} \right\rvert}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2}{N \times (N-1)} \times \left(\frac{N^3 - N}{12} - \sum_{i=1}^{g} \frac{t_i^3 - t_i}{12}\right)}}$	$> z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\tilde{\mu}_1 \leq \tilde{\mu}_2$	$\tilde{\mu}_1 > \tilde{\mu}_2$	$z = \dfrac{U - \frac{n_1 \times n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2}{N \times (N-1)} \times \left(\frac{N^3 - N}{12} - \sum_{i=1}^{g} \frac{t_i^3 - t_i}{12}\right)}}$	$> z_{1-\alpha}$
$\tilde{\mu}_1 \geq \tilde{\mu}_2$	$\tilde{\mu}_1 < \tilde{\mu}_2$	$z = \dfrac{U - \frac{n_1 \times n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2}{N \times (N-1)} \times \left(\frac{N^3 - N}{12} - \sum_{i=1}^{g} \frac{t_i^3 - t_i}{12}\right)}}$	$< z_{\alpha}$

Mit

$N = n_1 + n_2$: Summe der beiden Stichprobenumfänge.

g : Anzahl der verbundenen Gruppen.

t_i : Anzahl der gebundenen Werte in der $i - ten$ Bindungsgruppe.

3.2.8 Rangdispersions-Test (2 Stichproben, Vergleich der Streuung)

Dieses Testverfahren setzt zwei *unabhängige* und zufällig entnommene Stichproben voraus. Eine normalverteilte Grundgesamtheit wird nicht vorausgesetzt, *jedoch sollte der Unterschied zwischen den beiden Medianwerten gering sein*. Andernfalls wird das Ergebnis dieses Testverfahrens sehr unzuverlässig:

- Je größer die Differenz zwischen den beiden Medianwerten ist, desto größer ist das $\boldsymbol{\beta}$-Risiko dieses Testverfahrens, einen Unterschied in der Streuung nicht zu erkennen, wenn in Wahrheit ein Unterschied besteht.

Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
    - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
      <stetige Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <Nicht normal verteilt> |
      <Streuungstest> | <Rangdispresions Test>.
- Register <Daten>:
    - In der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der zwei gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
    - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Testen>:
    - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
    - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

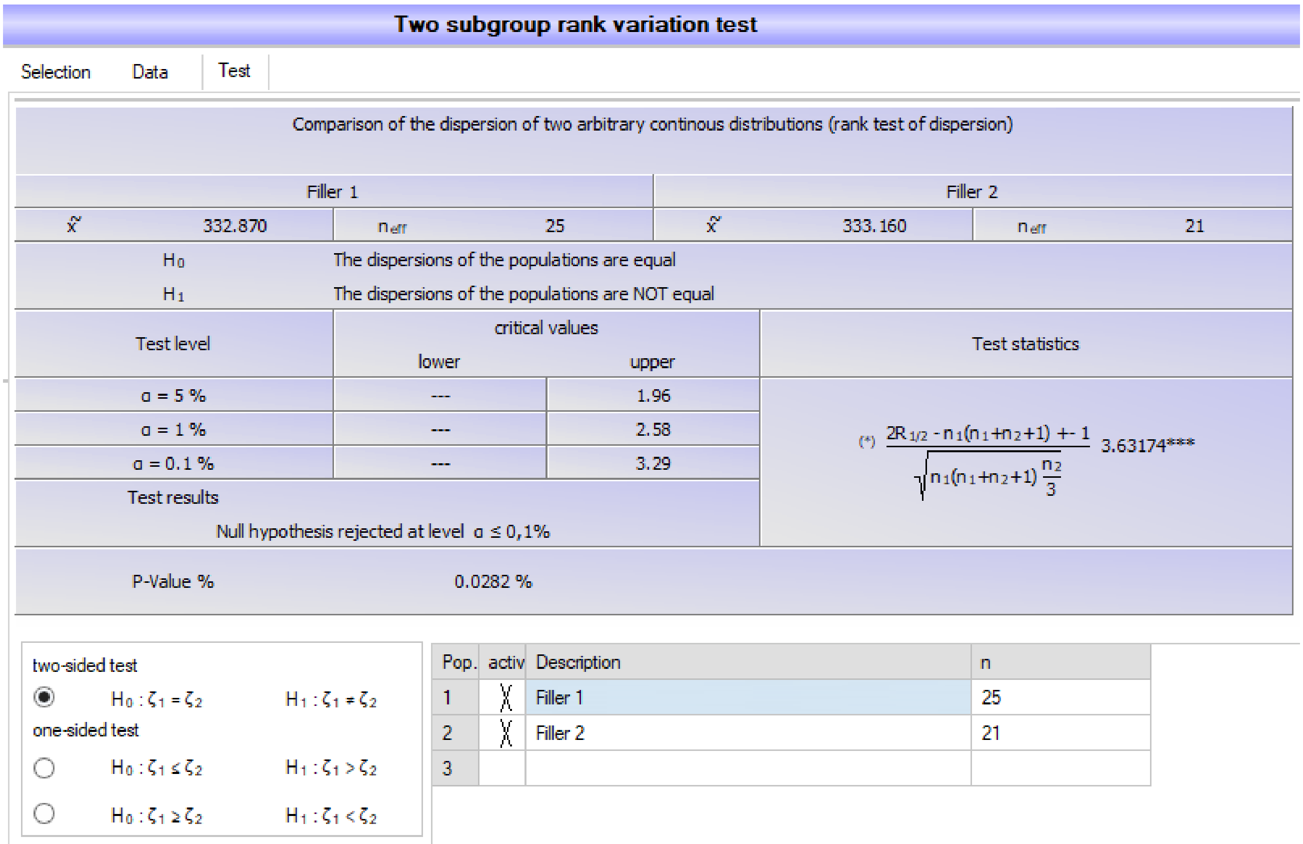


Abbildung 21: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis eines Rangdispersions-Tests.

Berechnung der statistischen Werte des Tests und der kritischen Werte

Die folgenden Berechnungsschritte werden verwendet, um die Statistik des Tests zu erhalten:

1) Bestimmung des Stichprobenumfang für beide Stichproben: n_1 und n_2
2) Beide Stichproben zu einer gemeinsamen Stichprobe kombinieren.
3) Sortiere die Daten der kombinierten Stichprobe aufsteigend.
4) Berechnung des Stichprobenumfangs der kombinierten Stichprobe: $N = n_1 + n_2$
5) Berechnung der Ränge für die kombinierte Stichprobe.

   Wenn N gerade ist:
$$r_i = \begin{cases} 2i & wenn\ i\ gerade\ ist\ und\ 1 < i \ \leq N/2 \\ 2(N-i)+2 & wenn\ i\ gerade\ ist\ und\ \ N/2 < i \leq N \\ 2i-1 & wenn\ i\ ungerade\ ist\ und\ 1 \ \leq i \leq N/2 \\ 2(N-i)+1 & wenn\ i\ ungerade\ ist\ und\ \ N/2 < i < N \end{cases}$$

   Wenn N ungerade ist:
$$r_i = \begin{cases} 2i & wenn\ i\ gerade\ ist\ und\ 1 < i < N/2 \\ 2(N-i)+1 & wenn\ i\ gerade\ ist\ und\ \ N/2 < i < N \\ 2i-1 & wenn\ i\ ungerade\ ist\ und\ 1 \ \leq i \leq N/2 \\ 2(N-i)+2 & wenn\ i\ ungerade\ ist\ und\ \ N/2 < i \leq N \end{cases}$$

6) Berechnung der *Summe der Ränge* für die Daten der *ersten* Stichprobe: R_1
7) Berechnung der *Summe der Ränge* für die Daten der *zweiten* Stichprobe: R_2
8) Wenn es **keine** Gleichheit gibt und $2 \times R_1 > n_1 \times (N+1)$ist die Teststatistik:
$$z = \frac{2 \times R_1 - n_1 \times (N+1) - 1}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2 \times (N+1)}{3}}}$$
   Wenn es **keine** mehrfach gleichen Werte vorhanden sind und die Bedingung $2 \times R_1 \leq n_1 \times (N+1)$ erfüllt ist, so lautet die Prüfgröße:
$$z = \frac{2 \times R_1 - n_1 \times (N+1) + 1}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2 \times (N+1)}{3}}}$$

9) Kommen mehrfach gleiche Werte vor (Bindungen), so wird eine Bindungskorrektur berechnet:
$$tie_{adj} = \frac{4 \times n_1 \times n_2 \times (S_1 - S_2)}{N \times (N-1)}$$

   und der *Nenner der Prüfgröße* wird entsprechend angepasst:
$$\sqrt{\frac{[n_1 \times n_2 \times (N+1)]}{3} - tie_{adj}}$$

   wobei

   S_1 : *Summe der quadrierten Ränge* für die Bindungen.

   S_2 : *Summe der quadrierten mittleren Ränge* für die Bindungen.

Wie erwähnt, führt das Programm bei Bindungen (Bindung: mehrfaches Vorkommen des gleichen Wertes) eine Korrektur der Prüfgröße durch. *Die Bindungskorrektur wird in der Formel für die Prüfgröße jedoch nicht angezeigt*. Diese Tatsache sollte beachtet werden, wenn man das Ergebnis für die Prüfgröße mit einer Handrechnung nachvollziehen möchte. In neueren Versionen des Programms qs-STAT (14.0.4 und höher) wird die Bindungskorrektur durch ein in Klammern gesetztes Astrix-Symbol vor der Formel gekennzeichnet. In den älteren Versionen von qs-STAT (kleiner als die Version 14.0.4) wird das Asterix-Symbol noch nicht zur Kennzeichnung für die Bindungskorrektur verwendet.

Referenz:

Lothar SACHS, Jürgen HEDDERICH
Angewandte Statistik
17. Ausgabe 2020
ISBN 978-3662-62293-3
Springer
Kapitel 7.4.2 Rangdispersionstest von Siegel und Tukey
Seite 540 ff

3.3 Stetige Merkmale – Tests für mehrere Stichproben

In diesem Abschnitt sind die Testverfahren für multiple Stichproben (stetige Merkmale) beschrieben, die sich innerhalb des Fensters „Assistent (Testverfahren)“ befinden.

3.3.1 Äquivalenztest mit 1 Stichprobe

Ein t-Test mit einer Stichprobe auf Äquivalenz oder ein t-Test mit einer Stichprobe auf Nichtunterlegenheit wird verwendet, um zu zeigen, dass der Parameter μ der Grundgesamtheit *praktisch* nahe genug an einem Zielwert μ_{tar} liegt, um annehmbar zu sein: *Gleichheit, bis auf eine praktisch irrelevante Abweichung*.

Für die Differenz $\Delta = \mu - \mu_{tar}$ werden Grenzwerte festgelegt:

- *Zweiseitig* nach unten und oben im Falle der *Äquivalenz*
- *Einseitig* nach unten oder einseitig nach oben im Falle der *Nichtunterlegenheit*.

Bei einem *zweiseitigen* 1-Stichproben Äquivalenz t-Test gibt es *zwei Nullhypothesen* und somit *zwei einseitige* t-Tests (das "ODER" ist hier exklusiv):

Für die Differenz $\Delta = \mu - \mu_{tar}$ formuliert man die beiden Nullhypothesen

$H0_{lower}: \Delta \leq b_L \ ODER \quad H0_{upper}: \Delta \geq b_U$

gegen die Alternativhypothese $H1$:

$H1: b_L < \Delta < b_U$

mit:

b_L : Eingabewert für die untere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz $\Delta = \mu - \mu_0$.

b_U : Eingabewert für die obere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz $\Delta = \mu - \mu_0$.

Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit einem stetigen Merkmal erzeugen oder laden.

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
    - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
      <stetige Verteilungen> | <>2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
      <Lagetest> | <Äquivalenztest mit 1 Stichprobe>

- Register <Daten>:
  - In der Spalte „aktiv“ auf die Zelle des gewünschten Merkmals klicken, um es auszuwählen.
  - Auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Testen>:
  - Falls erforderlich: Eingabe der unteren Äquivalenzgrenze b_L.
  - Falls erforderlich: Eingabe der oberen Äquivalenzgrenze b_U.
  - Auswahl der gewünschten Alternativhypothese.
  - Klicke auf das "Taschenrechner"-Symbol, um den Test auszuführen.

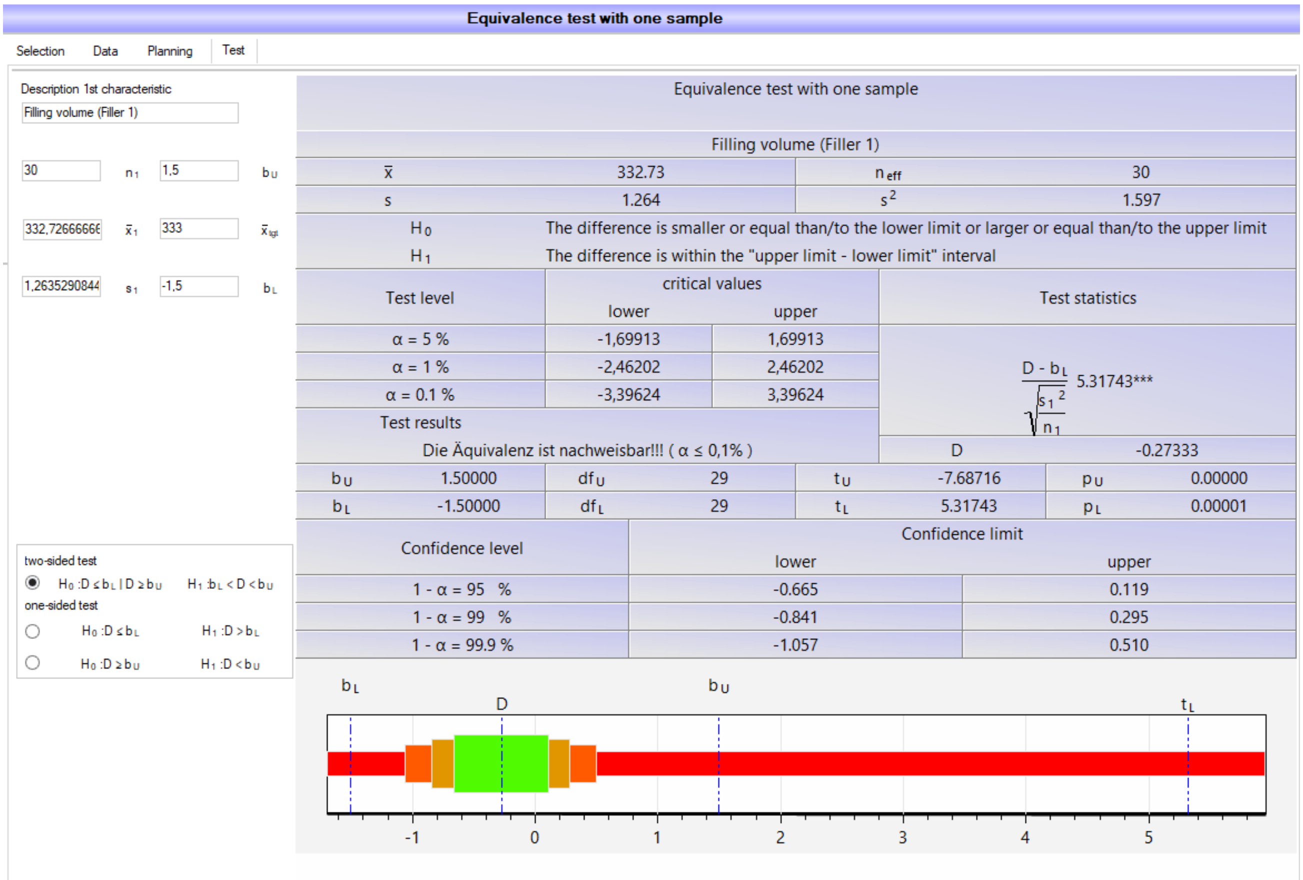


Abbildung 22: Fenster "Assistent (Testverfahren)" mit dem Ergebnis eines 1-Stichproben-Äquivalenztest.

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (grün: Äquivalenztest, blau: Nichtunterlegenheit)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße(n)	Kritischer Wert / kritische Werte
$\Delta \le b_L$ oder $\Delta \ge b_U$	$b_L < \Delta < b_U$	$\frac{(\bar{x}-\mu_{tar})-b_L}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$ oder $\frac{(\bar{x}-\mu_{tar})-b_U}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$	$> t_{1-\alpha;n-1}$ oder $< t_{\alpha;n-1}$
$\Delta \le b_L$	$\Delta > b_L$	$\frac{(\bar{x}-\mu_{tar})-b_L}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$	$> t_{1-\alpha;n-1}$
$\Delta \ge b_U$	$b_U < \Delta$	$\frac{(\bar{x}-\mu_{tar})-b_U}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$	$< t_{\alpha;n-1}$

Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen (grün: Äquivalenz, blau: Nichtunterlegenheit)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\Delta \le b_L$ oder $\Delta \ge b_U$	$b_L < \Delta < b_U$	$(\bar{x}-\mu_{tar})+t_{\alpha;n-1}\times\frac{s}{\sqrt{n}} \le \Delta \le (\bar{x}-\mu_{tar})+t_{1-\alpha;n-1}\times\frac{s}{\sqrt{n}}$
$\Delta \le b_L$	$\Delta > b_L$	$(\bar{x}-\mu_{tar})+t_{\alpha;n-1}\times\frac{s}{\sqrt{n}} \le \Delta$
$\Delta \ge b_U$	$b_U < \Delta$	$\Delta \le (\bar{x}-\mu_{tar})+t_{1-\alpha;n-1}\times\frac{s}{\sqrt{n}}$

mit:

$\Delta = \mu - \mu_{tar}$

μ_{tar} : Soll-/Zielwert des Parameters μ

$\bar{x}$: Mittelwert der Stichprobe

s : Standardabweichung der Stichprobe

n : Stichprobengröße

b_L : Eingabewert für die untere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz $\Delta = \mu - \mu_{tar}$.

b_U : Eingabewert für die obere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz $\Delta = \mu - \mu_{tar}$.

$t_{1-\alpha;n-1}$: $(1-\alpha)$-Quantil der (zentralen) t-Verteilung mit $df = n-1$ Freiheitsgraden.

3.3.2 Äquivalenztest mit 2 Stichproben

Ein t-Test auf Äquivalenz mit zwei Stichproben oder ein t-Test auf Nichtunterlegenheit mit zwei Stichproben wird verwendet, um zu zeigen, dass die beiden Lageparameter μ_1 und μ_2 *praktisch* so nahe beieinander liegen, dass diese als gleichwertig angesehen werden können: *Gleichheit, bis auf eine praktisch irrelevante Abweichung*.

Für die Differenz $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ der beiden Lageparameter werden Grenzwerte festgelegt:

- *Zweiseitig* nach unten und oben im Falle der *Äquivalenz*
- *Einseitig* nach unten *oder* einseitig nach oben im Falle der *Nichtunterlegenheit*.

Bei einem *zweiseitigen* t-Test auf *Äquivalenz* gibt es *zwei Nullhypothesen* und somit *zwei einseitige* t-Tests (das "ODER" ist hier exklusiv):

Für die Differenz $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ formuliert man die beiden Nullhypothesen

$$H_{0.unten}: \Delta \leq b_L \;\; ODER \;\; H_{0.oben}: \Delta \geq b_U$$

gegen die Alternativhypothese

$$H_1: b_L < \Delta < b_U$$

mit:

b_L : Eingabewert für die untere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz $\Delta = \mu_1 - \mu_2$.
b_U : Eingabewert für die obere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz $\Delta = \mu_1 - \mu_2$.

Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
    <stetige Verteilungen> | <>2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> | <Lagetest> | <Äquivalenztest mit 2 Stichproben>.
- Register <Daten>:
  - In der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der zwei gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Testen>:
  - Eingabe der unteren Äquivalenzgrenze b_L (falls erforderlich).

- Eingabe der oberen Äquivalenzgrenze b_U (falls erforderlich).
- Auswahl der gewünschten Alternativhypothese.
- Klicke auf das "Taschenrechner"-Symbol, um den Test auszuführen.

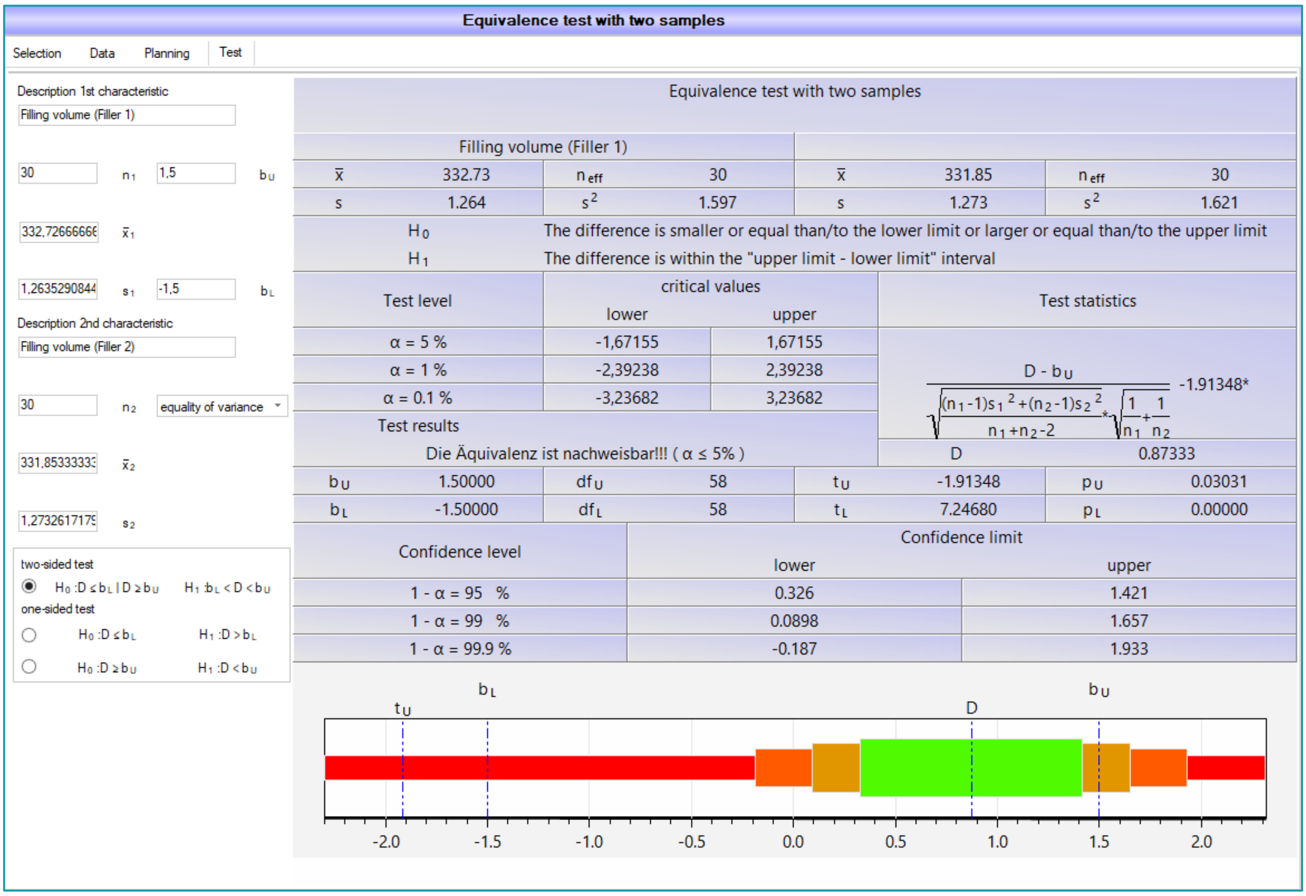


Abbildung 23: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis eines Zweistichproben-Äquivalenztests für die Abfüllmengen zweier Füllköpfe einer Abfüllanlage.

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (grün: Äquivalenz, blau: Nichtunterlegenheit)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\Delta \leq b_L$ oder $\Delta \geq b_U$	$b_L < \Delta < b_U$	$\frac{D - b_L}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} \times \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ oder $\frac{D - b_U}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} \times \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$> t_{1-\alpha;n_1+n_2-2}$ oder $< t_{\alpha;n_1+n_2-2}$
$\Delta \leq b_L$	$\Delta > b_L$	$\frac{D - b_L}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} \times \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$> t_{1-\alpha;n_1+n_2-2}$
$\Delta \geq b_U$	$b_U < \Delta$	$\frac{D - b_U}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} \times \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$< t_{\alpha;n_1+n_2-2}$

Mit:

$D = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$

Bei *ungleichen* Varianzen ist der *Nenner* der Statistik des Tests zu ersetzen durch:

$$\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

und bei der Berechnung der kritischen Werte auf der Grundlage der Quantile der t-Verteilung verwenden wir die modifizierten Freiheitsgrade ν:

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1-1)} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2-1)}}$$

Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen (grün: Äquivalenz, blau: Nichtunterlegenheit)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\Delta \leq b_L$ oder $\Delta \geq b_U$	$b_L < \Delta < b_U$	$D + t_{\alpha;df} \times se_\Delta \leq \Delta \leq D + t_{1-\alpha;df} \times se_\Delta$
$\Delta \leq b_L$	$\Delta > b_L$	$D + t_{\alpha;df} \times se_\Delta \leq \Delta$
$\Delta \geq b_U$	$b_U < \Delta$	$\Delta \leq D + t_{1-\alpha;df} \times se_\Delta$

mit:

$\Delta = \mu_1 - \mu_2$

$D = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$

se_Δ bei *gleichen* Varianzen $\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} \times \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$ und im Falle *ungleicher* Varianzen $\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$

$\bar{x}_i$: Mittelwert der i –ten Stichprobe

s_i^2 : Varianz der i –ten Stichprobe

n_i : Stichprobenumfang der i –ten Stichprobe

b_L : Eingabewert für die untere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz $\Delta = \mu_1 - \mu_2$.

b_U : Eingabewert für die obere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz $\Delta = \mu_1 - \mu_2$.

$t_{1-\alpha;df}$: $(1-\alpha)$-Quantil der (zentralen) t-Verteilung mit

$df = n_1 + n_2 - 2$ Freiheitsgraden im Falle *gleicher* Varianzen bzw.

$df = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1-1)}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2-1)}}$ im Falle *ungleicher* Varianzen.

3.3.3 Äquivalenztest mit 2 verbundenen Stichproben

Ein t-Test mit zwei Stichproben für gepaarte Stichproben auf Äquivalenz oder ein t-Test mit zwei Stichproben für gepaarte Stichproben auf Nichtunterlegenheit wird verwendet, um zu zeigen, dass die Parameter μ_1 und μ_2 *praktisch* nahe genug beieinander liegen, um als quasi *gleich* angesehen werden zu können: *Gleichheit, bis auf eine praktisch irrelevante Abweichung*.

Für die Differenz $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ der beiden Parameter werden Grenzwerte festgelegt:

- *Zweiseitig* nach unten und oben im Falle der *Äquivalenz.*
- *Einseitig* nach unten oder einseitig nach oben im Falle der *Nichtunterlegenheit*.

Im Falle eines *zweiseitigen* t-Tests auf *Äquivalenz* bei zwei paarweise verbundenen Stichproben gibt es *zwei* Nullhypothesen und somit *zwei* einseitige t-Tests (das "ODER" ist hier exklusiv):

Für die Differenz $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ formuliert man die beiden Nullhypothesen

$$H_{0.unten}: \Delta \leq b_L \;\; ODER \;\; H_{0.oben}: \Delta \geq b_U$$

gegen die Alternativhypothese

$$H_1: b_L < \Delta < b_U$$

mit:

b_L : Eingabewert für die untere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz $\Delta = \mu_1 - \mu_2$.

b_U : Eingabewert für die obere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz $\Delta = \mu_1 - \mu_2$.

Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
    <stetige Verteilungen> | <>2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
    <Lagetest> | <Äquivalenztest mit 2 verb. Stichproben>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der zwei gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.

- Register <Testen>:
  - Eingabe der unteren Äquivalenzgrenze b_L (falls erforderlich).
  - Eingabe der oberen Äquivalenzgrenze b_U (falls erforderlich).
  - Auswahl der gewünschten Alternativhypothese.
  - Klick auf das "Taschenrechner"-Symbol, um den Test auszuführen.

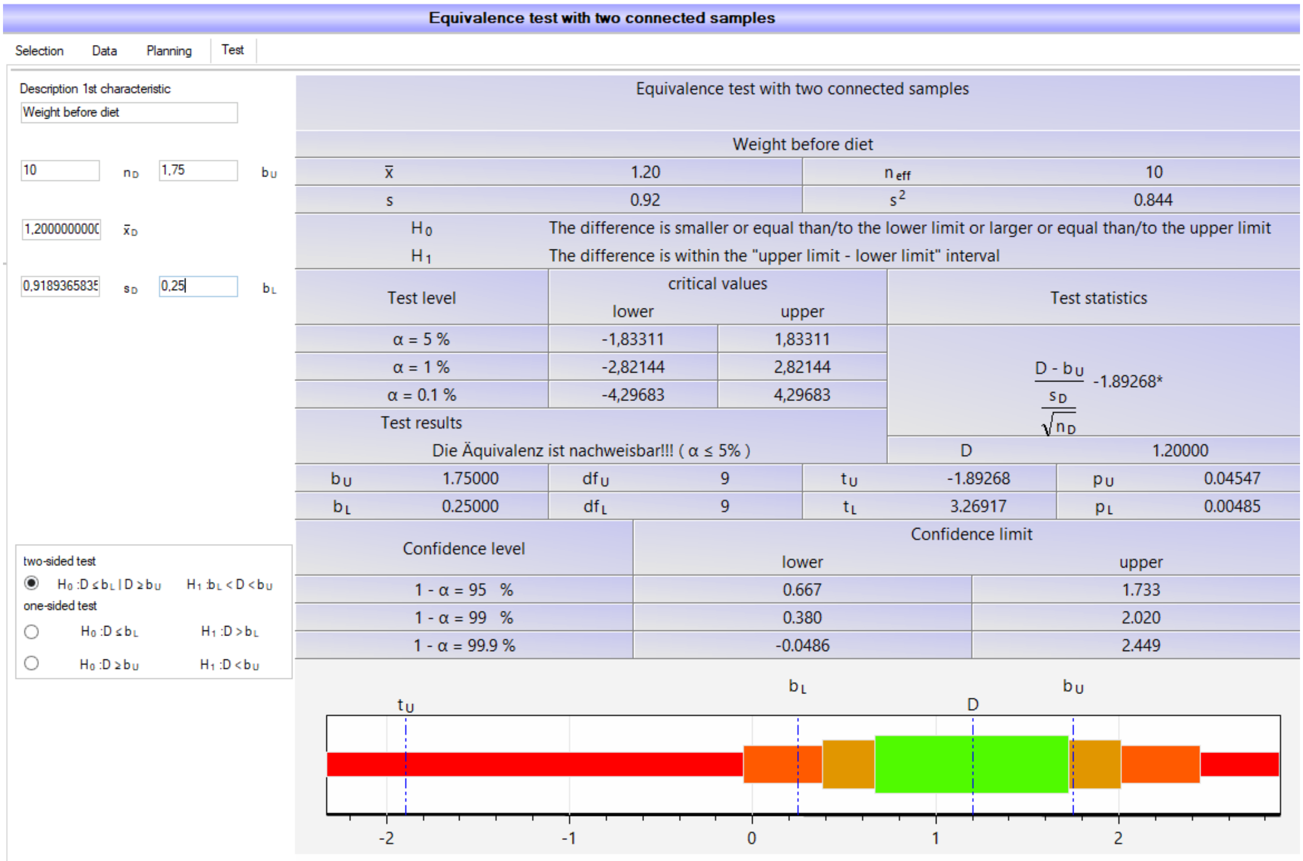


Abbildung 24: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt exemplarisch ein Ergebnis eines Äquivalenztests für zwei paarweise verbundene Stichproben.

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (grün: Äquivalenz, blau: Nichtunterlegenheit)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\Delta \leq b_L$ oder $\Delta \geq b_U$	$b_L < \Delta < b_U$	$\frac{D - b_L}{\left(\frac{s_D}{\sqrt{n}}\right)}$ oder $\frac{D - b_U}{\left(\frac{s_D}{\sqrt{n}}\right)}$	$> t_{1-\alpha;n-1}$ oder $< t_{\alpha;n-1}$
$\Delta \leq b_L$	$\Delta > b_L$	$\frac{D - b_L}{\left(\frac{s_D}{\sqrt{n}}\right)}$	$> t_{1-\alpha;n-1}$
$\Delta \geq b_U$	$b_U < \Delta$	$\frac{D - b_U}{\left(\frac{s_D}{\sqrt{n}}\right)}$	$< t_{\alpha;n-1}$

Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen (grün: Äquivalenz, blau: Nichtunterlegenheit)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauenswbereichsgrenzen
$\Delta \leq b_L$ oder $\Delta \geq b_U$	$b_L < \Delta < b_U$	$D + t_{\alpha;n-1} \times \frac{s_D}{\sqrt{n}} \leq \Delta \leq D + t_{1-\alpha;n-1} \times \frac{s_D}{\sqrt{n}}$
$\Delta \leq b_L$	$\Delta > b_L$	$D + t_{\alpha;n-1} \times \frac{s_D}{\sqrt{n}} \leq \Delta$
$\Delta \geq b_U$	$b_U < \Delta$	$\Delta \leq D + t_{1-\alpha;n-1} \times \frac{s_D}{\sqrt{n}}$

wo:

$\Delta = \mu_1 - \mu_2$

d_i : Differenz des iWertepaares der Stichprobe,

$d_i = x_{1.i} - x_{2.i}$ für $i = 1, 2, \dots, n$

n: : Stichprobengröße der Unterschiede

$x_{1.i}$: Der iWert der ersten Stichprobe

$x_{2.i}$: Der iWert der zweiten Stichprobe

D : Der arithmetische Mittelwert der Differenzen, $D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$

s_D : Die Standardabweichung der Differenzen,

$$s_D = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(d_i - D)^2}$$

$t_{p;df}$: Das p-Quantil der (zentralen) t-Verteilung für df Freiheitsgrade

3.3.4 Einfache ANOVA (ANOVA I) (>2 Stichproben, Vergleich Lageparameter)

Die einfache ANOVA wird verwendet, um *mehr* als zwei Mittelwerte (Parameter µ) auf der Grundlage von Multiple-Stichproben zu vergleichen (Annahme: jede dieser Stichproben wird zufällig aus einer normal verteilten Grundgesamtheit entnommen). Außerdem wird angenommen, dass die Standardabweichung σ gleich ist (für alle normalverteilten Grundgesamtheiten). Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte einen Datensatz mit mindestens drei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

Den Test durchführen:

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> **|** <Testverfahren> **|** <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
    - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
      <stetige Verteilungen> | <>2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
      <Lagetest> | <einfache ANOVA>
- Register <Daten>:
    - In der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der gewünschten drei oder mehr Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
    - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Testen>:
    - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

One-way ANOVA (ANOVA I)

Selection Data Test

Comparison of expected values of more than two normal distributions

H_0	The expected values of the populations are equal
H_1	The expected values of the populations are NOT equal (at least for one pair)

Test level	critical values		Test statistics
	lower	upper	
α = 5 %	---	3.28	32.6467***
α = 1 %	---	5.31	
α = 0.1 %	---	8.58	
Test results Null hypothesis rejected at level α ≤ 0,1%			

Pop.	activ	Description	n	Average	Standard deviation	Variance
1	X	Filler 1	12	333,2583333333	0,6215206182	0,3862878788
2	X	Filler 2	12	331,1583333333	0,6273440890	0,3935606061
3	X	Filler 3	12	332,9583333333	0,8016554841	0,6426515152

Abbildung 25: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis einer einfachen ANOVA.

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (Balanciertes Design)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\mu_i = konstant$	$\mu_i \neq \mu_j$ für mindestens ein Paar	$F = \frac{s_A^2}{s_e^2}$	$> F_{1-\alpha;df_A;df_e}$

mit:

$$SSA = n\sum_{i=1}^{k}(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$$

$$s_A^2 = \frac{SSA}{k-1}$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{i.j} - \bar{x}_i\right)^2$$

$$s_e^2 = \frac{SSE}{k(n-1)}$$

$$df_A = k - 1$$

$$df_e = k(n-1)$$

wo:

n : Der Stichprobenumfang einer Stichprobe (n ist gleich für alle k Stichproben: balancierten Design)

k : Anzahl der Stichproben (entspricht der Anzahl der Stufenwerte des Faktors)

$x_{i.j}$: Der $j-te$ Wert der i-ten Stichprobe

$\bar{x}_i$: *Arithmetischer Mittelwert der i − ten Stichprobe (i von 1 bis k)*

$\bar{\bar{x}}$: *Großer Mittelwert (entspricht dem Gesamtmittelwert in einem balancierten Design)*

Im Falle eines *unbalancierten* Designs (ungleicher Stichprobenumfang) wird die folgende Änderung vorgenommen:

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{i.j} - \bar{x}_i\right)^2$$

$$s_e^2 = \frac{SSE}{N-k}$$

$$SSA = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$$

$$s_A^2 = \frac{SSA}{k-1}$$

$$df_A = k - 1$$

$$df_e = N - k$$

Referenz:

Ronald E. WALPOLE, Raymond H. MYERS, Sharon L. MYERS, Keying YE
Wahrscheinlichkeit und Statistik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
9th Ausgabe
Pearson Education Limited (2016)
Kapitel 13.3 Einfache Varianzanalyse
pp. 529 ... 534

3.3.5 Bartlett Test (>2 Stichproben, Vergleich Varianzen)

Der Bartlett Test dient dem Vergleich von *mehr* als zwei Varianzen (Parameter σ^2) auf der Grundlage von mehreren Stichproben (unter der Annahme, dass jede dieser Stichproben zufällig aus einer normalverteilten Grundgesamtheit entnommen wurde). Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte einen Datensatz mit mindestens drei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

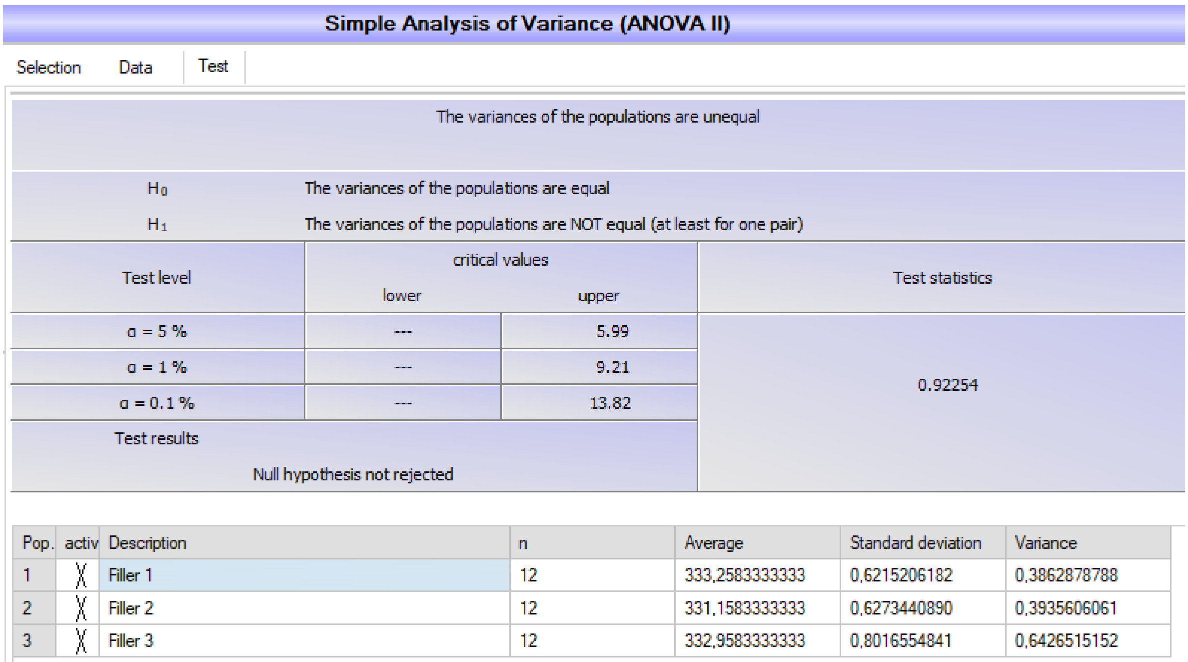
Den Test durchführen:

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
    - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
      <stetige Verteilungen> | <>2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> | <Streuungstest> | <Bartlett Test>
- Register <Daten>:
    - In der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der gewünschten drei oder mehr Merkmale klicken, um diese auszuwählen
    - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Testen>:
    - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test durchzuführen.


Simple Analysis of Variance (ANOVA II)

Selection | Data | Test

The variances of the populations are unequal

H_0	The variances of the populations are equal
H_1	The variances of the populations are NOT equal (at least for one pair)

Test level	critical values lower	critical values upper	Test statistics
α = 5 %	---	5.99	0.92254
α = 1 %	---	9.21	
α = 0.1 %	---	13.82	
Test results: Null hypothesis not rejected			

Pop.	activ	Description	n	Average	Standard deviation	Variance
1	X	Filler 1	12	333,2583333333	0,6215206182	0,3862878788
2	X	Filler 2	12	331,1583333333	0,6273440890	0,3935606061
3	X	Filler 3	12	332,9583333333	0,8016554841	0,6426515152

Abbildung 26: Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt exemplarisch ein Ergebnis des Bartlett Tests.

Berechnung der Prüfgröße und des kritischen Werts

1) Berechnung der Stichprobenvarianz für jede Stichprobe:
$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{i.j} - \bar{x}_i\right)^2$$

2) Berechnung der gepoolten Varianz:
$$s_p^2 = \frac{1}{N - p}\sum_{i=1}^{p}(n_i - 1)s_i^2$$
$$N = \sum_{i=1}^{p} n_i$$

3) Berechnung der Hilfsvariable c:
$$c = \frac{1}{3(p-1)}\left[\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N - p}\right] + 1$$

4) Berechnung der Prüfgröße:
$$B = \frac{1}{c}\left[(N - p) \times ln\left(s_p^2\right) - \sum_{i=1}^{p}(n_i - 1) \times ln\left(s_i^2\right)\right]$$

5) Berechnung des kritischen Wertes:
$\chi^2_{1-\alpha;p-1}$

wo:

p	: Anzahl der Stichproben (=Anzahl der Faktoren)
$\chi^2_{1-\alpha;p-1}$	: Die $(1-\alpha)$-Quantil der χ^2-Verteilung mit $df = p - 1$ Freiheitsgraden

Referenz:

Ronald E. WARPOLE, Raymond H. MEYRS, Sharon L. MYERS, Keying YE
Probability and Statistics for Engineers & Scientists
Neunte Auflage (2017)
Pearson Education Ltd.
ISBN 9781292161365
Abschnitt 13.4 Tests for the Equality of Several Variances
Seite 536 ff

3.3.6 Kruskal-Wallis-Test (>2 Stichproben, vergleich Lage)

Der Kruskal-Wallis-Test dient dem Vergleich von *mehr* als zwei Lageparametern auf der Grundlage von Multiple-Stichproben (unter der Annahme, dass jede dieser Stichproben zufällig aus gleich geformten Grundgesamtheiten gezogen wird). Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte einen Datensatz mit mindestens drei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

Den Test durchführen:

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
    <stetige Verteilungen> | <>2 Grundgesamtheiten> | <Nicht normal verteilt> | <Lagetest> | <H Test nach Kruskal Wallis>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der gewünschten drei oder mehr Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Testen>:
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

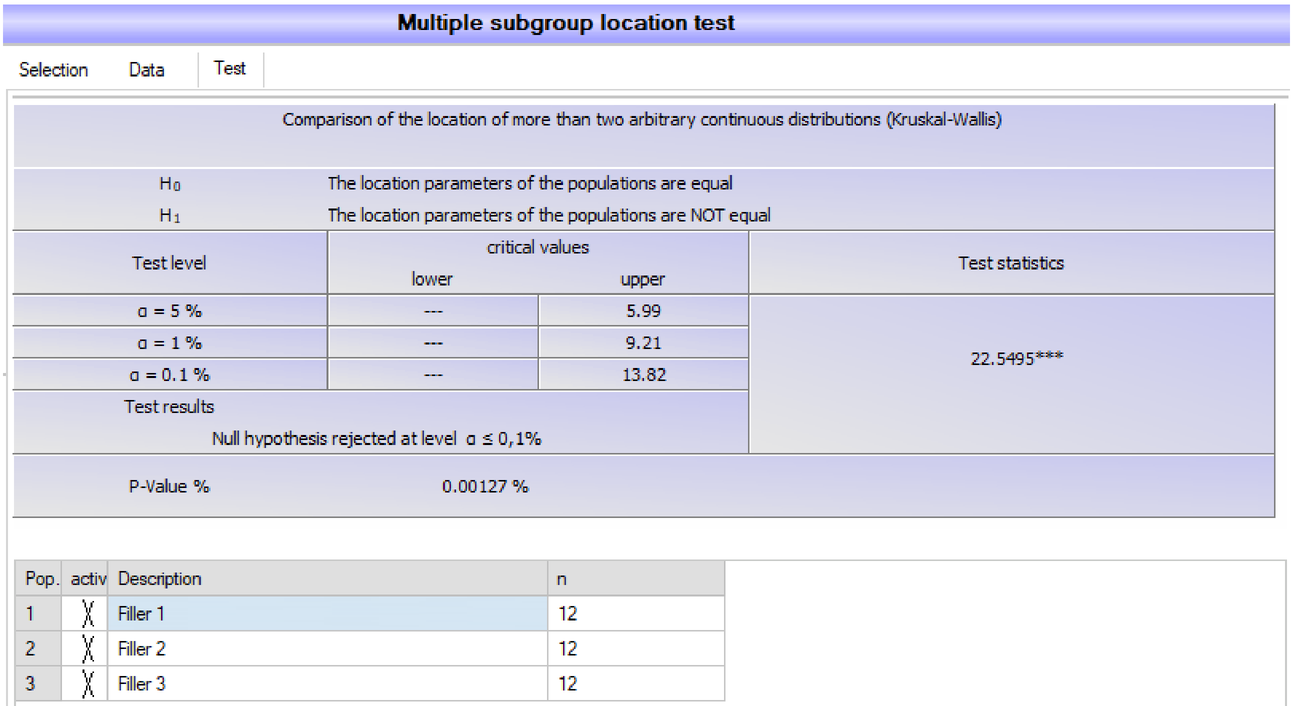


Abbildung 27: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt ein Ergebnis des Kruskal-Wallis-Tests.

Berechnung der statistischen Daten des Tests

Die Kruskal-Wallis-Teststatistik H ist wie folgt definiert:

$$H = \frac{1}{B}\left[\frac{12}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{n_i}r_i^2 - 3(N+1)\right]$$

wo:

N : Der Gesamtumfang der Stichprobe $N = \sum n_i$.

n_i : Der Umfang der $i - ten$ Stichprobe.

p : Die Anzahl der Stichproben (Anzahl der Niveaus der Faktoren)

B : Bindungskorrekturblock (wenn es keine Bindungen gibt, wird B=1 gesetzt):

$$B = 1 - \frac{1}{N^3 - N}\sum_{j=1}^{g}\left(t_j^3 - t_j\right)$$

wobei g die Anzahl an Bindungsgruppen ist (Bindung: mehrfaches Vorkommen des gleichen Wertes). Der Wert t_j ist die Anzahl der Werte in der $j - ten$ Bindungsgruppe.

Berechnung der statistischen Daten des Tests

$\chi^2_{1-\alpha;2}$: Das $(1-\alpha)$-Quantil der χ^2-Verteilung mit $df = 2$ Freiheitsgraden.

3.3.7 Levene-Test (> 2 Stichproben, Vergleich Streuung)

Der Levene-Test wird verwendet, um die Streuung mehrerer Grundgesamtheiten miteinander zu vergleichen. Es wird vorausgesetzt, dass die Stichproben zufällig aus Grundgesamtheiten mit gleicher Form entnommen wurden. Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte einen Datensatz mit mindestens drei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

- Register <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
    <stetige Verteilungen> | <>2 Grundgesamtheiten> | <Nicht normal verteilt> | <Streuungstest> | <Levene-Test>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte „aktiv“ auf die Zellen der gewünschten Merkmale (mindestens drei) klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Testen>:
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

Multiple subgroups variation test

Selection | Data | Test

Comparison of the dispersions of more than two arbitrary continuous distributions (Levene)			
H_0	The dispersions of the populations are equal		
H_1	The dispersions of the populations are NOT equal		
Test level	critical values		Test statistics
	lower	upper	
α = 5 %	---	5.99	1.57095
α = 1 %	---	9.21	
α = 0.1 %	---	13.82	
Test results	Null hypothesis not rejected		
P-Value %	45.59 %		

Pop.	activ	Description	n
1	X	Filler 1	12
2	X	Filler 2	12
3	X	Filler 3	12

Abbildung 28: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt exemplarisch ein Ergebnis des Levene-Tests.

Berechnung der Prüfgröße:

In einem ersten Schritt wird für jede Stichprobe die *absolute Abweichung vom Mittelwert der Stichprobe* berechnet. Im nächsten Schritt werden den absoluten Abweichungen *Ränge* zugewiesen. Im letzten Schritt wird der Kruskal-Wallis-Test mit diesen Rängen durchgeführt.