



# Assistent (Testverfahren) Erläuterung und Handhabung

FAQ/Handling 25 September 2023 Created with version 14.0.3.2





# Information about this document

All rights, including translation in foreign languages, are reserved. It is not allowed to reproduce any part of this document in any way without written permission of Hexagon.

Parts of this document may be automatically translated.

# **Document History**

Version	Date	Author(s)	Modifications / Remarks
v-0.78	09.20.2023	MBR	Translation (EN: v-0.91)



## INHALT

1	Testve	rfahren des Fensters "Assistent (Testverfahren)"	4
2	Testve	rfahren für attributive Merkmale	4
	2.1 Attri	ibutive Daten – Tests für eine Stichprobe	4
	2.1.1	p-Test (PV) 1 – Poisson-Verteilung (1 Stichprobe, Fehler je Einheit)	4
	2.1.2	p-Test (BV) 1 – Binomialverteilung (1 Stichprobe, Anteil fehlerhafter Einheiten	)9
	2.2 Attri	butive Daten – Tests für zwei Stichproben	12
	2.2.1	p-Test (PV) 2 – Poissonverteilung (2 Stichproben, Fehler je Einheit)	12
	2.2.2	p-Test (BV) 2 – Binomialverteilung (2 Stichproben, Anteil fehlerhafter Einheite	n) .15
	2.3 Attri	butive Daten – Test für mehrere Stichproben	18
	2.3.1	$\chi 2$ -Test – Poissonverteilung (>2 Stichproben, Fehler pro Einheit)	18
	2.3.2	$\chi 2$ Homogenitätstest – Poissonverteilung (>2 Stichproben, Fehler pro Einheit)	)21
	2.3.3	$\chi 2$ -Test – Binomialverteilung (>2 Stichproben, Anteil fehlerhafter Einheiten)	22
3	Testve	rfahren für stetige Merkmale	25
	3.1 Stet	ige Merkmale – Tests für eine Stichprobe	25
	3.1.1	u-Test 1 (u-Test bei einer Stichprobe)	25
	3.1.2	t-Test 1 (1 Stichprobe, Mittelwertvergleich)	28
	3.1.3	Einstichproben $\chi 2$ -Test (1 Stichprobe, Vergleich der Varianz)	31
	3.1.4	1 Stichproben Median-Test (Wilcoxon)	34
	3.2 Stet	ige Merkmale – Tests für zwei Stichproben	38
	3.2.1	t-Test P (EW) (2 gepaarte Stichproben, Mittelwertvergleich)	38
	3.2.2	t-Test P (2 gepaarte Stichproben, Mittelwertvergleich)	42
	3.2.3	u-Test 2 (2 Stichproben, Mittelwertvergleich)	44
	3.2.4	t-Test 2 (2 Stichproben, Mittelwertvergleich)	47
	3.2.5	F-Test (2-Stichproben, Vergleich der Varianzen)	51
	3.2.6	Differenzen-Median-Test (2 gepaarte Stichproben, Vergleich Median)	54
	3.2.7	Mann-Whitney U-Test (2 Stichproben, Vergleich Median)	56
	3.2.8	Rangdispersions-Test (2 Stichproben, Vergleich der Streuung)	60
	3.3 Stet	ige Merkmale – Tests für mehrere Stichproben	64
	3.3.1	Äquivalenztest mit 1 Stichprobe	64
	3.3.2	Äquivalenztest mit 2 Stichproben	67



3.3.3	Äquivalenztest mit 2 verbundenen Stichproben	.71
3.3.4	Einfache ANOVA (ANOVA I) (>2 Stichproben, Vergleich Lageparameter)	.74
3.3.5	Bartlett Test (>2 Stichproben, Vergleich Varianzen)	.78
3.3.6	Kruskal-Wallis-Test (>2 Stichproben, vergleich Lage)	.80
3.3.7	Levene-Test (> 2 Stichproben, Vergleich Streuung)	.82



# 1 Testverfahren des Fensters "Assistent (Testverfahren)"

Diese FAQ beschreibt die Testverfahren, die im Fenster "Assistent (Testverfahren)" (alter Name: "Assistent (Planen/Durchführen)") zu bedienen sind. Die rein technische Handhabung und Datenaufbereitung sind in einem separaten Dokument beschrieben.

# 2 Testverfahren für attributive Merkmale

Bevor ein Testverfahren im Fenster "Assistent (Testverfahren)" ausgewählt werden kann, werden Daten benötigt. Der erste Schritt ist daher das Öffnen des gewünschten Datensatzes oder das Anlegen eines neuen Datensatzes.

# 2.1 Attributive Daten – Tests für eine Stichprobe

In diesem Abschnitt sind die attributiven Testverfahren für eine Stichprobe beschrieben, die sich innerhalb des Fensters "Assistent (Testverfahren)" befinden.

## 2.1.1 p-Test (PV) 1 – Poisson-Verteilung (1 Stichprobe, Fehler je Einheit)

Wähle diesen Test, wenn eine Anzahl Fehler pro Einheit  $\mu$  mit einem vorgegebenen Sollwert  $\mu_0$  verglichen werden soll.

*Beispiel*: Ein komplexer Produktionsprozess weist langfristig nahezu konstant eine *mittlere Anzahl an Fehlern* pro Einheit  $\mu_0 = 0.05$  auf. In der laufenden Produktion wurden x = 22 Fehler auf n = 125 geprüften Teilen beobachtet, was der *mittleren Anzahl Fehler pro Einheit*  $\mu = \frac{22}{125} = 0.176$  entspricht. Die Produktionsleitung geht von einem alarmierenden Signal für eine systematische Vergrößerung aus, da die erwartete "normale" Anzahl bei  $(\mu_0 = 0.05 \times \frac{125}{125} = \frac{6.25}{125})$  ungefähr x = 6 Fehlern auf n = 125 geprüften Einheiten liegen sollte. Aus diesem Grund wird ein p-Test (PV) 1 durchgeführt:

- Mittlere Anzahl Fehler pro Einheit in der aktuellen Produktion (Alternativhypothese):  $\mu_1 = \frac{22}{125}$
- Mittlere Anzahl Fehler pro Einheit in der Vergangenheit (Nullhypothese):  $\mu_0 = 0.05 = 0.05 \times \frac{125}{125} = \frac{6.25}{125}$

Dateneingabe im Fenster "Tabelle der Merkmale 2":

Gesicherte Verteilung : Poissonverteilung

Stichprobenart (attributiv) : konstant

Dateneingabe im Fenster "Wertemaske":

Stichprobenumfang : 125

Anzahl der Nichtübereinstimmungen (x): 22



#### Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Folgenden Schaltflächen werden nacheinander angeklickt:
     <Diskrete Verteilungen> | <1 Grundges.> | <Poisson> | <P-Test (PV) 1>
  - Auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.



Abbildung 1: Fenster "Assistent (Testverfahren)" - Auswahl des Testverfahrens "p-test (PV) 1"



- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zelle des gewünschten Merkmals klicken, um es auszuwählen.
  - Zweimal auf die grüne Vorwärtsschaltfläche klicken (➔).

👌 Assist	ant (test	procedure)	_	×
		One subgroup p test (PD)		
6		Selection Data		_
	-	Pop. activ Part description Description n		
1		1 X One sample p+est for a Poisson distributed characteristic One sample p+est for a Poisson distributed characteristic 125		
]				
	<u>-</u>			
	0			

Abbildung 2: Fenster "Assistent (Testverfahren)" - Auswahl des Merkmals.

- Register <Test>:
  - Die Werte gemäß der Abbildung 3 eingeben.
  - Klicke auf das "Taschenrechner"-Symbol, um den Test auszuführen.

			One subgroup p test	(PD)		
	Selection Data Plan	ning Test				
30	Description characteristic		Comparison of the ex	pected value	e of a Poisson	distribution with a specified va
	Delects per unit			D	efects per un	it
	Reference units		n <sub>tot</sub>	125	Σ	Σx 22
	125 n		p			0.1760
	Number of errors		H <sub>0</sub> T H <sub>1</sub> T	he expected he expected	value of the p value of the p	population is smaller/equal to t population is bigger than the sp
	specified value (target value)		Test level	critical lower	values upper	Test statistics
	6.25 µo		α = 5 %		11	
			α = 1 %		13	v 22.0000***
	two-sided test		α = 0.1 %		15	x 22.0000****
	Ο H <sub>0</sub> :μ=μ <sub>0</sub>	$H_1: \mu \neq \mu_0$	Test results			
	one-sided test		Null hypothesis rejected at level $\alpha \le 0,1\%$			
		$H_1: \mu > \mu_0$	Confidence level		C	Confidence limit upper
	O H <sub>0</sub> :μ≥μ₀	$H_1: \mu < \mu_0$	1 - α = 95 %		14.89	
			1 - α = 99 %		12.57	
			1 - α = 99.9 %		10.29	
			μo			x
				10 11 12	12 14 15 1	16 17 19 10 20 21 22 22
			50,05	10 11 12	ו כו דו כו	

Abbildung 3: Fenster "Assistent (Testverfahren)" mit den Testergebnissen. Die Nullhypothese wurde auf dem Signifikanzniveau kleiner gleich 0,1 % verworfen – die Anzahl Fehler pro Einheit ist systematisch erhöht.



Das Ergebnis des Tests: Die Nullhypothese H0 wird auf dem Signifikanzniveau  $\alpha = 0.1$  % verworfen. Das bestätigt die Annahme einer systematisch erhöhten Anzahl an Fehlern pro Einheit in der laufenden Produktion.

#### Berechnung der kritischen Werte

Die *kritischen Werte* werden mit der *Verteilungsfunktion* der Poissonverteilung für die Wahrscheinlichkeiten  $1 - \alpha = 95\%, 99\%$  und 99.9 % berechnet. Die Berechnung erfolgt mit dem Parameter  $\mu$  der Nullhypothese:

$$P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\mu^i}{i!} exp^{-\mu}$$

wobei *k* die Anzahl der Einheiten ist, für die die Verteilungsfunktion zum *ersten Mal* gleich oder größer wird als die Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$ .

Für das oben genannte Beispiel ist die Verteilungsfunktion für k = 11 das erste Mal größer als  $1 - \alpha = 95$  %:

$$P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k=11} \frac{6.25^i}{i!} exp^{-6.25} \approx 0,97367 \ (\triangleq 97.367 \ \%)$$

wobei der Parameter  $\mu = 0.05 \times 125 = 6.25$  die erwartete Anzahl Fehler pro 125 Einheiten ist (Nullhypothese).

Allgemein gilt: Der kritische Wert k ist gefunden, wenn die Verteilungsfunktion ...

$$P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\mu^i}{i!} exp^{-\mu}$$

das erste Mal größer als oder gleich der jeweiligen Wahrscheinlichkeit in der folgenden Tabelle ist:

Vortrauonanivoau	<i>H</i> 1: $\mu < \mu_0$	<i>H</i> 1: $\mu > \mu_0$	$H1: \mu \neq \mu_0$		
vertrauensniveau	Einseitig unten	Einseitig oben	Zweiseitig unten	Zweiseitig oben	
95 %	$\alpha = 5 \%$	$1 - \alpha = 95 \%$	$\alpha/2 = 2.5 \%$	$1 - \alpha/2 = 97.5 \%$	
99 %	$\alpha = 1 \%$	$1-\alpha=99\%$	$\alpha/2 = 0.5 \%$	$1 - \alpha/2 = 99.5 \%$	
99.9 %	$\alpha = 0.1$ %	$1 - \alpha = 99.9 \%$	$\alpha/2 = 0.05 \%$	$1 - \alpha/2 = 99.95 \%$	

Table 1: Wahrscheinlichkeiten zur Ermittlung der kritischen Werte k für einseitige und zweiseitige Tests.

#### Berechnung der Vertrauensgrenzen

Die *Grenzwerte* für den *einseitig nach unten begrenzten* Vertrauensbereich des Beispiels wurden für die Vertrauensniveaus  $1 - \alpha = 95 \%, 99 \%$  und 99.9 % berechnet. Dabei wurde die folgende Beziehung zur Chi<sup>2</sup>-Verteilung verwendet, wobei *x* die *Anzahl der Fehler* in der Stichprobe ist:

$$x_{ci1s.lower} = \frac{\chi^2_{2x,\alpha}}{2}$$

Für das oben genannte Beispiel ist die einseitig untere 95 %-Vertrauensbereichsgrenze:

$$x_{ci1s.lower} = \frac{\chi^2_{2\times 22, \alpha=0.05}}{2} = \frac{29.78748}{2} = 14.893$$



Die weiteren einseitig unteren Vertrauensbereichsgrenzen werden auf die gleiche Weise berechnet, jedoch mit  $\alpha = 1 \%$  und 0.1 %.

Vortrouopopiyoou	<i>H</i> 1: $\mu < \mu_0$	<i>H</i> 1: $\mu > \mu_0$	$H1: \mu \neq \mu_0$		
ventrauensniveau	Einseitig oben	Einseitig unten	Zweiseitig unten	Zweiseitig oben	
95 %	$\frac{\chi^2_{p=0.95,df=2x+2}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.05,df=2x}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.025,df=2x}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.975, df=2x+2}}{2}$	
99 %	$\frac{\chi^2_{p=0.99,df=2x+2}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.01,df=2x}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.005,df=2x}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.995,df=2x+2}}{2}$	
99.9 %	$\frac{\chi^2_{p=0.999,df=2x+2}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.001,df=2x}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.0005,df=2x}}{2}$	$\frac{\chi^2_{p=0.9995, df=2x+2}}{2}$	

Table 2: Gleichungen zur Bestimmung ein- und zweiseitiger Vertrauensbereichsgrenzen

## Referenz:

Joachim HARTUNG Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik 15. Auflage Oldenbourg (2009) ISBN 978-3-486-59028-9 Kapitel 3.4.1 auf Seite 214

## 2.1.2 p-Test (BV) 1 – Binomialverteilung (1 Stichprobe, Anteil fehlerhafter Einheiten)

Der Test "p-Test (BV) 1" wird gewählt, wenn eine Anzahl *fehlerhafter* Einheiten mit einem vorgegebenen Sollwert vergleichen werden soll. Ein Sollwert kann z. B. aus einer Anforderung, aus einem erwarteten Wert oder aus Langzeitdaten der Vergangenheit abgeleitet werden.

*Beispiel*: Ein komplexer Produktionsprozess weist über einen langen Zeitraum hinweg einen nahezu konstanten Anteil fehlerhafter Einheiten  $p_0 = 0.05$  (*entspricht* 5 %) auf. In der letzten Produktion hat man beim End-of-Line Test n = 100 Einheiten geprüft und darunter x = 12 fehlerhafte Einheiten festgestellt. Dies ergibt einen Anteil fehlerhafter Einheiten:  $p = \frac{12}{100} = 0.12$  (*entspricht* 12 %). Die Produktionsleitung geht von einem Alarmsignal für einen systematischen Anstieg der Anzahl fehlerhafter Einheiten aus und führt aus diesem Grund einen p-Test (BV) 1 durch:

- Derzeitiger Anteil fehlerhafter Einheiten in der Produktion (Alternativhypothese):  $p_1 = \frac{12}{100} = 0.12$
- Langfristig beobachteter Anteil fehlerhafter Einheiten in der Produktion (Nullhypothese):  $p_0 = 0.05$

Dateneingabe im Fenster "Merkmalstabelle 2":

Gesicherte Verteilung	: Binomialverteilung
Stichprobenart (attributiv)	: konstant

Dateneingabe im Fenster "Wertemaske":

Gesamter Stichprobenumfang der geprüften Einheiten	: 100
Anzahl der gezählten nichtübereinstimmenden Einheiten	: 12

## Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>
  - Die folgenden Schaltflächen werden nacheinander angeklickt: <Diskrete Verteilungen> | <1 Grundgesamtheit> | <Binomial> | <p-Test (BV) 1>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zelle des gewünschten Merkmals klicken, um es auszuwählen.
  - Zweimal auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.



- Register <Testen>:
  - Den Sollwert in das Feld "vorgegebener Wert (Sollwert)" eingeben (Abbildung 4)
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

Assistant (tes	st procedure)				-	
		One subgroup p tes	st (BD)			
	Selection Data Planning Test					
99	Description characteristic	Comparison o	f the expected va	lues of a Binomial di	istribution with a specified value	
	number of nonconforming parts					
600	Subaraua aiza		numbe	er of nonconforming	) parts	
-	Subgroup size	n tot	100	Σ	Σx 12	
1 Alexandre	n n	p			12.00 %	
	Number of defective units	Ho	The expected valu	e of the population	is smaller/equal to the specified value	
× 🕐	12 x	H <sub>1</sub>	The expected valu	e of the population	is bigger than the specified value	
	specified value (target value)	Test level	critical lower	values	Test statistics	
	5 % po	a = 5 %		9		
		a = 1 %		11		
	two-sided test	a = 0.1 %		13	x 12.0000**	
	O H <sub>0</sub> :p=p <sub>0</sub> H <sub>1</sub> :p≠p <sub>0</sub>	Test results				
	one-sided test	Null hypothesis r	ejected at level o	≤ 1%		
	H <sub>0</sub> :p≤p <sub>0</sub> H <sub>1</sub> :p>p <sub>0</sub>	Confidence level			Confidence limit	
		Confidence level		lower	upper	
	O H <sub>0</sub> :p≥p0 H <sub>1</sub> :p <p0< p=""></p0<>	1 - a = 95 %		0.0707		
		1-a=99 %		0.0559		
		1 - a = 99.9 %		0.0419		
					p = x/n	
		po				_
		┝᠇᠇┼᠇᠇᠇┼᠇᠇	<del></del>		<u>,</u>	┥
		0.04 0.05	0.06 0.07	7 0.08 0.	09 0.10 0.11 0.12	
						-

Abbildung 4: Fenster "Assistent (Testverfahren)" - zeigt die Ergebnisse des Verfahrens "p-test (BV) 1". Die Nullhypothese wurde auf dem Signifikanzniveau kleiner-gleich  $\alpha \leq 1$  % verworfen: Der aktuelle Anteil fehlerhafter Einheiten ist signifikant höher im Vergleich zum langjährigen Mittelwert der Vergangenheit.

#### Berechnung der kritischen Werte

Der obere kritische Wert des einseitigen Tests wird anhand der kumulativen Verteilungsfunktion der Binomialverteilung berechnet: Der obere kritische Wert zum Vertrauensniveau  $1 - \alpha = 95$  % ist der Wert für k, bei dem die folgende Summe zum ersten Mal gleich oder größer ist als die Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$ .

$$P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} {n \choose i} \times p^{i} \times (1-p)^{(n-i)}$$



Für das obige Beispiel ist der kritische Wert k = 9, da für k = 9 die folgende Summe das erste Mal größer ist als die Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 95$  % (*entpsricht dezimal* 0.95).

$$P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k=9} {100 \choose i} \times 0.05^i \times (0.95)^{(100-i)} \approx 0.9718$$

Table 3: Wahrscheinlichkeiten zur Bestimmung der kritischen Werte k für ein- und zweiseitige Tests.

Vortrauonanivoau	<i>H</i> 1: $p < p_0$	<i>H</i> 1: $p > p_0$	$H1: p \neq p_0$		
vertrauensniveau	Einseitig unten	Einseitig oben	Zweiseitig unten	Zweiseitig oben	
95 %	$\alpha = 5 \%$	$1 - \alpha = 95 \%$	$\alpha/2 = 2.5 \%$	$1 - \alpha/2 = 97.5 \%$	
99 %	$\alpha = 1 \%$	$1-\alpha=99\%$	$\alpha/2 = 0.5 \%$	$1 - \alpha/2 = 99.5 \%$	
99.9 %	$\alpha = 0.1$ %	$1 - \alpha = 99.9 \%$	$\alpha/2 = 0.05 \%$	$1 - \alpha/2 = 99.95 \%$	

#### Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen

Die Vertrauensbereichsgrenzen werden mit der Quantil-Funktion (inverse Verteilungsfunktion) der Beta-Verteilung  $B^{-1}(p, a, b)$  ermittelt:

Table 4.	Restimmunasaleichunaer	fiir ein- i	und zweiseitige	Vertrauensbereichsgrenze	nد
Table 4.	Destiminungsgieichunger		unu zweisenige	vertrauensbereichsgrenze	211

	<i>H</i> 1: $p < p_0$	<i>H</i> 1: $p > p_0$	$H1: p \neq p_0$			
Vertrauensniveau	Einseitig oben a = x + 1, b = n - x	Einseitig unten a = x, b = n - x + 1	Zweiseitig unten a = x, b = n - x + 1	Zweiseitig oben a = x + 1, b = n - x		
95 %	$B^{-1}(0.95, a, b)$	$B^{-1}(0.05, a, b)$	$B^{-1}(0.025, a, b)$	$B^{-1}(0.975, a, b)$		
99 %	$B^{-1}(0.99, a, b)$	$B^{-1}(0.01, a, b)$	$B^{-1}(0.005, a, b)$	$B^{-1}(0.995, a, b)$		
99.9 %	$B^{-1}(0.999, a, b)$	$B^{-1}(0.001, a, b)$	$B^{-1}(0.0005, a, b)$	$B^{-1}(0.9995, a, b)$		

- *a* : Erster Formparameter der Beta-Verteilung.
- *b* : Zweiter Formparameter der Beta-Verteilung.
- *x* : Beobachtete Anzahl fehlerhafter Einheiten.
- *n* : Gesamtumfang der Stichprobe.



# 2.2 Attributive Daten – Tests für zwei Stichproben

In diesem Abschnitt sind die attributiven Testverfahren für zwei Stichproben beschrieben, die sich innerhalb des Fensters "Assistent (Testverfahren)" befinden.

## 2.2.1 p-Test (PV) 2 – Poissonverteilung (2 Stichproben, Fehler je Einheit)

Neuen Datensatz mit zwei attributiven Merkmalen erstellen:

• Register <Datei> | <Neu> und "2 neue diskrete Merkmale" erstellen.

Folgende Werte in das Fenster "Merkmalsmaske" eingeben:

Eingabefeld	Merkmal 1	Merkmal 2
Merkmalsnummer	PL 01	PL 02
Merkmalsbezeichnung	Anzahl Fehler auf Linie 01	Anzahl Fehler auf Linie 02
Stichprobenumfang (K8500)	225	225
Stichprobenart (attributiv) (K8503)	konstant	konstant
Verteilung (K2011)	Poissonverteilung	Poissonverteilung

Folgende Werte in das Fenster "Wertemaske" eingeben:

Spaltenname in der Wertemaske	Eingabewert
Anzahl Fehler auf Linie 01	20
Anzahl Fehler auf Linie 02	8

## Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken: <Diskrete Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <Poisson> | <p-Test (PV) 2>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Zweimal auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Testen>:
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen



• Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

	election Data Test Description 1st characteristic Defect counts Production Line 01							
	Description 1st characteristic Defect counts Production Line 01							
	Defect counts Production Line 01		Co	omparison of the ex	pected values of tw	o Poisson distribu	utions	
			Defect counts I	Defect counts Production Line 01 Defect counts Production Line (				
	Reference units		D tot 225	Σχ	20 ntot	225	Σχ	8
	225 n <sub>1</sub>		p	0.0889		p	0.0356	
	lumber of error		Ho	The expected value	les of the populatio	ns are equal		
			H1	The expected value	les of the populatio	ns are NOT equa	I	
	escription 2nd characteristic	Test level	critica lower	critical values		Test statistics		
1	Defect counts Production Line 02		a = 5 %		2.11			
			a = 1 %		2.66	X1 N2 0 00000*		
E E E E E E E E E E E E E E E E E E E	leference units	a = 0.1 %		3.49	49 $\overline{x_2 + 1n_1} = 2.22222^+$			
4	225 n <sub>2</sub>		Test results					
N	lumber of errors		Null hypothesis	rejected at level o	i ≤ 5%			
8	8 x <sub>2</sub>	Confidence level		Confidence limit upper				
	we aided test		1 - a = 95 %		1.055		6.562	
			1 - a = 99 %		0.835		8.984	
	one-sided test	1.μ1 <del>+</del> μ2	1 - a = 99.9 %		0.637		13.29	
	⊖ H <sub>0</sub> :μ <sub>1</sub> ≤μ <sub>2</sub> Η	1 : μ1 > μ2	<u>p</u> 1/	p <sub>2</sub>				
	⊖ H <sub>0</sub> :μ <sub>1</sub> ≥μ <sub>2</sub> H	1 : μ1 < μ2	E = 1					
			3 4 5	6 7 8	9 10 1	11 12 13	14	

Abbildung 5: Fenster "Assistent (Testverfahren)" mit dem Ergebnis des Zwei-Stichproben-P-Tests für die Anzahl der Nichtübereinstimmungen. In diesem Beispiel ist die beobachtete Anzahl der Nichtübereinstimmungen in beiden Produktionslinien signifikant unterschiedlich.

Bei der Eingabe der Beispieldaten ist die Eingabereihenfolge zu beachten (die erste Stichprobe ist immer diejenige mit der größeren Anzahl Fehler je Einheit):

 $\frac{x_1}{n_1} \ge \frac{x_2}{n_2}$ 

Bemerkung: Wenn diese Eingabereihenfolge nicht beachtet wird, ändert die Software die Anordnung der Merkmale automatisch gemäß dieser Regel. Leider wird in diesem Fall die ausgegebene Formel für die Prüfgröße nicht entsprechend angepasst. Berücksichtigen Sie diesen Sachverhalt, wenn Sie die Berechnungen der Software von Hand nachvollziehen möchten.



Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert für das Niveau der Signifikanz $\alpha$			
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\frac{x_1}{x_2+1} \times \frac{n_2}{n_1}$	$> F_{df_1, df_2, 1-\alpha}$			
$\mu_1 \ge \mu_2$	Dieser Fall ist zu vermeiden (Eir	ieser Fall ist zu vermeiden (Eingabereihenfolge-Regel)				
$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\frac{x_1}{x_2+1} \times \frac{n_2}{n_1}$	$> F_{df_1, df_2, 1 - \frac{\alpha}{2}}$			

#### Berechnung der Prüfgröße und des kritischen Wertes des p-Tests bei zwei Stichproben (PV):

Dabei ist *F* die Quantilfunktion (inverse kumulative Verteilungsfunktion) der *F*-Verteilung mit den folgenden Freiheitsgraden:  $df_1 = 2(x_2 + 1)$  und  $df_2 = 2x_1$ .

## Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen

Bestimmungsgleichung für die zweiseitigen Vertrauensbereichsgrenzen für das Verhältnis  $\mu_1/\mu_2$ :

$$\frac{x_1}{(x_2+1)} \times \frac{1}{F_{df_{1,l}, df_{2,l}, 1-\alpha/2}} \le \frac{\mu_1}{\mu_2} \le \frac{(x_1+1)}{x_2} \times F_{df_{1,u}, df_{2,u}, 1-\alpha/2}$$

mit

 $df_{1l} = 2(x_2 + 1)$   $df_{2l} = 2x_1$   $df_{1u} = 2(x_1 + 1)$  $df_{2u} = 2x_2$ 

Bei der Berechnung einseitiger Vertrauensbereichsgrenzen verwendet die Software das Vertrauensniveau  $1 - \alpha$  anstelle von  $1 - \alpha/2$ .

Referenz:

Ulrich GRAF, Hans-Joachim HENNING, Kurt STANGE, Peter-Theodor WILRICH Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik Dritte Ausgabe Springer 1998 ISBN 3-540-16901-6 Formeln (6.13.4) und (6.13.8), S. 191 - 193



## 2.2.2 p-Test (BV) 2 – Binomialverteilung (2 Stichproben, Anteil fehlerhafter Einheiten)

Einen neuen Datensatz mit zwei diskreten (attributiven) Merkmalen erstellen:

• Register <Datei> | <Neu> und "2 neue diskrete Merkmale" erstellen.

Dateneingabe Im Fenster "Merkmalsmaske":

Eingabefeld	Erstes Merkmal	Zweites Merkmal
Merkmalsnummer	PL 01	PL 02
Merkmaslbezeichnung	Fehlerhafte Einheiten Linie 01	Fehlerhafte Einheiten Linie 02
Stichprobenumfang (K8500)	225	225
Stichprobenart (attributiv) (K8503)	konstant	konstant
Verteilung (K2011)	Binomialverteilung	Binomialverteilung

Dateneingabe im Fenster "Wertemaske":

Spaltenname in der Werte-Maske	Eingabewert
Fehlerhafte Einheiten Linie 01	20
Fehlerhafte Einheiten Linie 02	8

## Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Die folgenden Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <Diskrete Verteilungen> | <2 Grundges.> | <Binomial> | <p-Test (BV) 2>
- Register <Daten>:
  - In der Zeile "aktiv" auf die Zellen der gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Zweimal auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Testen>:
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.



🕹 Assistan	nt (test	procedure)								- 1	□ ×
				Two subgroup	p test (BD)						
0	0	Selection Data	Test								
	•	Description 1st charact	teristic oduction Line 01	Comparisor	Comparison of the expected values of two Binomia				tions (u test)	ino 02	
200		Subgroup size		225	Σν	20	De	225	Σν	8	
		225 n <sub>1</sub>			8.89 %	20	intot	D 225	3.56 %		
	~	Number of defective u	nits	H <sub>0</sub> H <sub>1</sub>	The expected The expected	values of values of	the popu the popu	lations are equ lations are NO	al Fequal		
×	0	20 x <sub>1</sub>		Test level	critic lower	al values up	per	Te	est statistics		
		Defective units on Production Line 02		α = 5 %		1.	96	x <sup>'</sup> 1 n <sub>2</sub> - x <sup>'</sup> 2 n <sub>1</sub>			
				α = 1 %		2.	58			2.14666*	56*
		Subgroup size		α = 0.1 %		3.	29	$\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})n_1}$	$\overline{p}$ )n <sub>1</sub> n <sub>2</sub> (n <sub>1</sub> + n <sub>2</sub> )		ĩ
		225 n <sub>2</sub>	2	lest results							
		Number of defective units 8 x <sub>2</sub>		P-Value %     3.182 %							
		two-sided test		Confidence leve	el 👘	lov	( Ner	onfidence limit			
			2 H1:D1≠D2	1 - α = 95 %		0.00	)425		0.0935		
		one-sided test		1 - α = 99 %		-0.0	0977		0.108		
			2 H1:D1>D2	1 - α = 99.9 %		-0.0	)261	0.124			
		O H₀:p1≥p	2 H <sub>1</sub> :p <sub>1</sub> <p<sub>2</p<sub>	E	- 0	p'1	- p'2				
				-0.04 -0.02 0	.00 0.01 0.02 0	0.03 0.04 0	0.05 0.06	0.07 0.08 0.09 (	0.10 0.11 0.12	0.13	]

Abbildung 6: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis des p-Tests mit zwei Stichproben (Binomialverteilung). In diesem Beispiel ist die beobachtete Anzahl der fehlerhaften Einheiten in beiden Produktionslinien signifikant unterschiedlich.

## Berechnung der statistischen Daten des Tests

In einem ersten Schritt berechnet die Software den Schätzer für den Anteil p (unter Annahme der H0-Bedingung):

$$\bar{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

Die Software berechnet die Häufigkeiten mit einer Kontinuitätskorrektur,  $x'_1$  und  $x'_2$ :

 $\begin{aligned} x_1' &= \begin{cases} x_1 + 0.5 & wenn \mid (x_1 + 0.5) - n_1 \times \bar{p} \mid < \mid (x_1 - 0.5) - n_1 \times \bar{p} \mid \\ x_1 - 0.5 & wenn \mid (x_1 + 0.5) - n_1 \times \bar{p} \mid > \mid (x_1 - 0.5) - n_1 \times \bar{p} \mid \end{cases} \\ x_2' &= \begin{cases} x_2 + 0.5 & wenn \mid (x_2 + 0.5) - n_2 \times \bar{p} \mid < \mid (x_2 - 0.5) - n_2 \times \bar{p} \mid \\ x_2 - 0.5 & wenn \mid (x_2 + 0.5) - n_2 \times \bar{p} \mid > \mid (x_2 - 0.5) - n_2 \times \bar{p} \mid \end{cases} \end{aligned}$ 



Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert für das Niveau der Signifikanz α
$p_{1} = p_{2}$	$p_1 \neq p_2$	$\frac{ x_1' \times n_2 - x_2' \times n_1 }{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p}) \times n_1 \times n_2 \times (n_1+n_2)}}$	$> z_{1-\alpha}$
$p_1 \leq p_2$	$p_1 > p_2$	$\frac{x_1' \times n_2 - x_2' \times n_1}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p}) \times n_1 \times n_2 \times (n_1+n_2)}}$	$> z_{1-\alpha}$
$p_1 \ge p_2$	$p_1 < p_2$	$\frac{x_1' \times n_2 - x_2' \times n_1}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p}) \times n_1 \times n_2 \times (n_1+n_2)}}$	< - z <sub>1-a</sub>

In einem dritten Schritt berechnet die Software die Prüfgröße in Abhängigkeit von der gewählten Hypothese:

## Referenz:

Ulrich GRAF, Hans-Joachim HENNING, Kurt STANGE, Peter-Theodor WILRICH Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik 3<sup>rd</sup> Ausgabe Springer 1998 ISBN 3-540-16901-6 Formeln (6.10.6) auf Seite 186

## Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen

Zur Berechnung der zweiseitigen Vertrauensbereichsgrenzen für die Differenz der Anteile  $\pi_1 - \pi_2$  verwendet die Software die folgende Näherung:

$$(p_1' - p_2') \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\bar{p} \times (1 - \bar{p}) \times \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 \times n_2}\right)}$$

wobei  $p_1' = \frac{x_1'}{n_1}$  und  $p_2' = \frac{x_2'}{n_2}$ 

Zur Berechnung einer einseitig unteren *oder* oberen Vertrauensbereichsgrenze verwendet die Software  $z_{1-\alpha}$  anstelle von  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ .



# 2.3 Attributive Daten – Test für mehrere Stichproben

In diesem Abschnitt sind die attributiven Testverfahren für multiple Stichproben beschrieben, die sich innerhalb des Fensters "Assistent (Testverfahren)" befinden.

# 2.3.1 $\chi^2$ -Test – Poissonverteilung (>2 Stichproben, Fehler pro Einheit)

Mit diesen Testverfahren prüft man bei mehr als zwei Stichproben auf Gleichheit der Anzahl Fehler pro Einheit. Es wird vorausgesetzt, dass die Stichproben jeweils zufällig aus einer poissonverteilten Grundgesamtheit entnommen wurden.

Für das folgende Beispiel erzeugt man einen neuen Datensatz mit *drei* diskreten (attributiven) Merkmalen:

• Register <Datei> | <Neu> und "3 neue diskrete Merkmale" erstellen.

Eingabefeld	Erstes Merkmal	Zweites Merkmal	Drittes Merkmal
Merkmalsnummer	PL 01	PL 02	PL 03
Merkmalsbezeichnung	Anzahl Fehler Linie 01	Anzahl Fehler Linie 02	Anzahl Fehler Linie 03
Stichprobenumfang (K8500)	125	125	125
Stichprobenart (attributiv) (K8503)	konstant	konstant	konstant
Verteilung (K2011)	Poissonverteilung	Poissonverteilung	Poissonverteilung

Dateneingabe im Fenster "Merkmalsmaske":

Dateneingabe Im Fenster "Wertemaske":

Spaltenname in der Werte-Maske	Eingabewert
Anzahl Fehler Linie 01	20
Anzahl Fehler Linie 02	8
Anzahl Fehler Linie 03	7

## Software-Dokumentation



## Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Die folgenden Schaltflächen sind nacheinander zu klicken:

     <
- Register <Daten>:
  - Klicke in der Spalte "aktiv" auf die Zellen der gewünschten drei oder mehr Merkmale, um diese auszuwählen.
  - Zweimal auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Testen>:
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Klicke auf das "Taschenrechner"-Symbol, um die Auswertung auszuführen.

🕹 Assistant (test procedure) -							-		×		
					Multiple sub	groups p test (PD	))				
		Selection	Data	Test							
	6				Comparison of t	he expected values of P	Poisson distributions				
688			Ho		The expected values of the	populations are equal					
			H1 The expected values of the populations are NOT equal (at least for one pair)								
			Test lev	el	critical values			Test statistics			
× 1	0	a = 5 %				5.99					
			a = 1 %	6		9.21		(xi - niu) <sup>2</sup>			
			a = 0.1	%		13.82		Σ <sub>i</sub> <u></u> 8.9/143*			
			Test resu	ilts							
				Null hypothes	is rejected at level $\sigma \le 5\%$						
		Pop. activ Description				n	x	Test statistics			
		1 X	Final inspe	ection defect cour	nts Line 01	125	20	5.95238			
		2 X	Final inspe	ection defect cour	nts Line 02	125	8	1.15238			
		з Х	Final inspe	ection defect cour	nts Line 03	125	7	1.86667			

Abbildung 7: Fenster "Assistent (Testverfahren)" mit dem Ergebnis des Mehrstichproben p-Tests (Poissonverteilung) für die beobachte Anzahl Fehler je Einheit bei drei End-of-Line Tests. Das Ergebnis ist signifikant auf dem Niveau  $\alpha = 5$  %.



## Berechnen der Prüfgröße und der kritischen Werte des Multiple-Stichproben-p-Tests

Als Vorbedingung muss jede der  $x_i$  größer oder gleich fünf sein sollte.

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\mu_i = konstant$	μ <sub>i</sub> ≠ μ <sub>j</sub> für mindestens ein Paar	$\sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - n_i \times \hat{\mu})^2}{n_i \times \hat{\mu}}$	$> \chi^2_{1-lpha, k-1}$

mit

*k* : Anzahl der Stichproben.

 $n_i$  : Stichprobenumfang der i - ten Stichprobe.

 $x_i$  : Anzahl Fehler in der i - ten Stichprobe.

 $\hat{\mu} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{n_i}$ 

 $\chi^2_{1-\alpha,k-1}$ : 1 –  $\alpha$  Quantil (inverse Verteilungsfunktion) der Chi<sup>2</sup>-Verteilung mit k - 1 Freiheitsgraden.

Für die Daten im oben angegeben Beispiel:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{n_i} = \frac{1}{3} \left( \frac{20}{125} + \frac{8}{125} + \frac{7}{125} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{35}{125}$$

Da alle  $n_i = 125 = konstant$  sind, ergibt sich die Anzahl der erwarteten Häufigkeiten zu:

 $n_i \times \hat{\mu} = 125 \times \frac{1}{3} \times \frac{35}{125} = \frac{35}{3}$ 

$$\chi^2 = \frac{(20 - 35/3)^2}{35/3} + \frac{(8 - 35/3)^2}{35/3} + \frac{(7 - 35/3)^2}{35/3} \approx 8.97143 > \chi^2_{95\,\%;2} = 5.9915$$

Als Vorbedingung muss jede der  $x_i$  größer oder gleich fünf sein.

Referenz:

Ulrich GRAF, Hans-Joachim HENNING, Kurt STANGE, Peter-Theodor WILRICH Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik Dritte Ausgabe Springer 1998 ISBN 3-540-16901-6 Formeln (6.13.3) auf Seite 193



# 2.3.2 $\chi^2$ Homogenitätstest – Poissonverteilung (>2 Stichproben, Fehler pro Einheit)

Es gibt eine zweite, ältere Variante des p-Tests für mehrere Stichproben (Poisson-Verteilung), den  $\chi^2$ -Homogenitätstest. Diese Testvariante ist vermutlich eine Näherungslösung basierend auf der "normalisierenden" Wurzeltransformation. Wenn die Bedingung  $n_i x_i < n_i \hat{\mu}$  erfüllt ist, dann wird eine Kontinuitätskorrektur angewendet:  $x'_i = x_i + 1$ . Mit den Daten des zuvor verwendeten Beispiels berechnet man die folgende Prüfgröße:

$$\chi^{2} = \left[2 \times \left(\sqrt{20} - \sqrt{35/3}\right)\right]^{2} + \left[2 \times \left(\sqrt{8+1} - \sqrt{35/3}\right)\right]^{2} + \left[2 \times \left(\sqrt{7+1} - \sqrt{35/3}\right)\right]^{2}$$

Die weiteren Berechnungsschritte sind die gleichen wie bei der zuvor beschriebenen Variante des Testverfahrens.

	Comparison of t	son distributions			
Ho	The expected values of the				
H1	The expected values of the	populations are NOT equal	(at least for one pair)		
Test level	critical	values	Test statistics		
	lower upper				
a = 5 %		5.99			
a = 1 %		9.21	5. [ 2/ [w] [a.()]]2 6 52502*		
a = 0.1 %		21 [ 2( YX1 - YN1H )] - 0.00000.			
Test results					
Null hypothesi	is rejected at level $a ≤ 5\%$				

Pop.	activ	Description	n	x	Test statistics
1	χ	Final inspection defect counts Line 01	125	20	4.46465
2	χ	Final inspection defect counts Line 02	125	8	0.69106
3	χ	Final inspection defect counts Line 03	125	7	1.37932

Abbildung 8: Ergebnis der zweiten Variante des p-Tests mit mehreren Stichproben (PV), Homogenitätstest.

## Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistant (test procedure)>

- Register <Auswahl>:
  - Klicke auf die Schaltlfächen in der angegebenen Folge:
     <diskrete Verteilungen> | < >2 Grundges. > |<Poisson>| <χ<sup>2</sup>-Homogenität Test>
- Register <Daten>:
  - Klicke in der Spalte "aktiv" auf die Zellen der gewünschten drei oder mehr Merkmale, um diese auszuwählen.
  - Klicke auf den grünen Vorwärtspfeil (→).



- Register <Test>:
  - Klicke auf das Taschenrechner-Symbol, um den Test auszuführen.

## 2.3.3 $\chi^2$ -Test – Binomialverteilung (>2 Stichproben, Anteil fehlerhafter Einheiten)

Dies ist ein Mehrstichprobentest für binomialverteilte Stichproben.

Für das folgende Datenbeispiel soll ein neuer Datensatz mit *drei* diskreten Merkmalen erstellt werden:

Multifunktionsleiste:

• Register <Datei> | <Neu> und "3 neue diskrete (attributive) Merkmale" erstellen.

Eingabefeld	Merkmal 1	Merkmal 2	Merkmal 3
Merkmalsnummer	PL 01	PL 02	PL 03
Merkmalsbezeichnung	Anzahl der fehlerhaften Einheiten (Linie 01)	Anzahl der fehlerhaften Einheiten (Linie 02)	Anzahl der fehlerhaften Einheiten (Linie 03)
Stichprobenumfang (K8500)	300	300	300
Stichprobenart (attributiv) (K8503)	konstant	konstant	konstant
Verteilung (K2011)	Binomialverteilung	Binomialverteilung	Binomialverteilung

Dateneingabe im Fenster "Merkmalsmaske"

## Dateneingabe im Fenster "Wertemaske"

Spaltenname	Eingabewerte
Anzahl fehlerhafter Einheiten (Linie 01)	20
Anzahl fehlerhafter Einheiten (Linie 02)	10
Anzahl fehlerhafter Einheiten (Linie 03)	7

## Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:

     Ziskrete Verteilungen> | < >2 Grundgesamtheiten > | 
     Binomial> | <χ<sup>2</sup>-Test>



- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der gewünschten drei oder mehr Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Zweimal auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Testen>:
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

👌 Assista	Assistant (test procedure) — 🗌								×			
			Multiple subgroups p test (BD)									
		Selection	election Data Test									
	9		Comparison of expected values of Binomial distributions									
			Ho		The expected values of the	populations are equal						
	4		H1		The expected values of the	populations are NOT equ	ual (at least for one pa	ir)				
			Test lev	el	critical	values		Test statistics				
*	2				lower	upper						
			a = 5 %	6		5.99						
			a = 1 %	6		9.21	(xi - ni	$(x_i - n_i \overline{p})^2$ , $(n_i - x_i - n_i (1 - \overline{p}))^2$				
			a = 0.1	%		13.82	21np	n;(1-j	p) 7.85565*			
			Test resu	lts								
				Null hypothes	is rejected at level $\sigma \leq 5\%$							
		Pop. activ Description				n	x	Test factor (x)	Test factor (n-x	)		
		1 X Counts of defective units (Pr			roduction Line 01)	300	20	4.76577	0.20433			
		2 X Counts of defective units (Production Line 02)				300	10	0.44144	0.018926			
		з Х	Counts of	defective units (P	roduction Line 03)	300	7	2.30631	0.098880			

Abbildung 9: Fenster "Assistent (Testverfahren) mit dem Ergebnis des p-Tests. Der Test hat auf dem Signifikanzniveau $\alpha$  = 5 % bezüglich des Anteils fehlerhafter Einheiten Unterschiede zwischen den Produktionslinien erkannt.

## Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$p_i = konstant$	$p_i \neq p_j$ für mindestens ein Paar	$\sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - n_i \bar{p})^2}{n_i \bar{p}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{[n_i - x_i - n_i (1 - \bar{p})]^2}{n_i (1 - \bar{p})}$	$> \chi^2_{1-lpha,k-1}$
Vereinfachte	e Version der Formel:	$\frac{1}{\bar{p}(1-\bar{p})}\sum_{i=1}^k n_i(p_i-\bar{p})^2$	$>\chi^2_{1-lpha,k-1}$



## Software-Dokumentation

mit

- $x_i$  : Die *beobachtete* Anzahl der fehlerhaften Einheiten in der i ten Stichprobe.
- $n_i$  : Der Stichprobenumfang der i ten Stichprobe.
- $p_i = \frac{x_i}{n_i}$  : Der *beobachtete* Anteil fehlerhafter Einheiten in der *i ten* Stichprobe.

$$\bar{p} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} p_i$$

k

: Die Anzahl der Stichproben.

- $n_i \bar{p}$  : Die *erwartete* Anzahl der fehlerhaften Einheiten in der *i ten* Stichprobe.
- $n_i x_i$  : Die *beobachtete* Anzahl von OK-Einheiten in der i ten Stichprobe.
- $n_i(1-\bar{p})$  : Die *erwartete* Anzahl von OK-Einheiten in der i ten Stichprobe.
- $\chi^2_{1-\alpha,k-1}$  : Das  $1-\alpha$  Quantil der Chi<sup>2</sup>-Verteilung für k-1 Freiheitsgrade.

## Referenz

Ulrich GRAF, Hans-Joachim HENNING, Kurt STANGE, Peter-Theodor WILRICH Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik 3<sup>rd</sup> Ausgabe Springer 1998 ISBN 3-540-16901-6 Formel (6.10.12) auf Seite 187



# **3 Testverfahren für stetige Merkmale**

Bevor ein Testverfahren im Fenster "Assistent (Testverfahren)" ausgewählt werden kann, werden Daten benötigt. Der erste Schritt ist daher das Öffnen des gewünschten Datensatzes oder das Anlegen eines neuen Datensatzes.

# 3.1 Stetige Merkmale – Tests für eine Stichprobe

In diesem Abschnitt sind die Testverfahren für eine Stichprobe (stetiges Merkmal) beschrieben, die sich innerhalb des Fensters "Assistent (Testverfahren)" befinden.

## 3.1.1 u-Test 1 (u-Test bei einer Stichprobe)

Mit diesem Testverfahren kann der Lageparameter  $\mu$  mit einem *Sollwert*  $\mu_{tar}$  vergleichen werden. Es wird davon ausgegangen, dass es sich bei dem ausgewerteten Datensatz um eine Zufallsstichprobe aus einer *normalverteilten* Grundgesamtheit handelt. Außerdem wird angenommen, dass der **Parameter**  $\sigma$  dieser Normalverteilung bereits **bekannt ist**. Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit einem stetigen Merkmal erzeugen oder laden.

## Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistenten (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Die folgenden Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <1 Grundgesamtheit> | <Normal verteilt> | <Lagetest> |
     σ bekannt>| <u-Test 1>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zelle des gewünschten Merkmals klicken, um es auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Planung>:
  - Hier kann der minimal erforderliche Stichprobenumfang berechnet werden oder aber die Power des Tests auf der Grundlage des aktuell verfügbaren Stichprobenumfangs beurteilt werden.
- Register <Testen>:
  - Den bekannten Wert der Standardabweichung oder alternativ den bekannten Wert der Varianz eingeben.
  - Den Sollwert für µ eingeben.
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.



## Software-Dokumentation

👌 Assista	ant (test	procedure)													-	□ ×
							One subgro	up u test								
0		Selection	Data	Planning	Test											
	Description characteristic						Comparison of the expected value of a normal distribution with a specified value									
188								Bottle filling volume								
		Subgroup :	size				x	99	9.40		n	eff		5		
	4	5	r	ı			σ	0.	500		C	J <sup>2</sup>		0.250		
	-	Arithmetic I	Mean of th	e subgroup			H <sub>0</sub> H <sub>1</sub>	The expe The expe	cted val	lue of the	e popula e popula	tion equ tion is N	uals the spec IOT equal to	ified values the special of the special sectors of the special secto	ue cified v	alue
<b>×</b>		999,4 Standard d	j		and stice.		Test level	low	critical er	values upi	ber		Test s	tatistics		
		Januaru u	eviation /	variance or po	pulation		α = 5 %		-	1.9	96					
		0,0		3		σ²	α = 1 %		-	2.58			<u> x - μ0 </u> x μ 2 68328**			
		specified value (target value) $\alpha = 0.1 \%$						-	3.2	29		σ (11 2.00520				
		1000	μ	10			Test results Null hypothesis	rejected a	at level	α ≤ 1%						
		two-sided	test				P-Value %	P-Value % 0.729 %								
		one-sided	H <sub>0</sub> :μ=μ	10	⊓1:μ≠μ(		Confidence Java				(	Confidence limit				
							confidence leve		lower			1	upper			
		0	Π0:μ <u>s</u> μ	10 1	π1:μ>μ(	-	1 - α = 95 %			99	9.0	999.8				
		0	$H_0: \mu \ge \mu$	10 I	H <sub>1</sub> :μ<μα		$1 - \alpha = 99 \%$			99	8.8			1000.0		
							$1 - \alpha = 99.9\%$			99	8.7			1000		
										5	ĸ					
														μo		
							998.6 998.8	999.0	999.2	2 99	9.4 9	999.6	999.8	1000.0	1000.	2

Abbildung 10: Fenster "Assistent (Testverfahren)" mit einem Ergebnis des u-Tests für eine Stichprobe (basierend auf einer Stichprobe mit den fünf Werten 999.5, 999.3, 998.9, 1000.4, 998.9).



Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\frac{ \bar{x} - \mu_0 }{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$	> $z_{1-\alpha/2}$
$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$	< <i>z</i> <sub>α</sub>
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$	$> z_{1-\alpha}$

## Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

Mit

- *n* : Der Stichprobenumfang.
- *σ* : Bekannter Wert der Standardabweichung (Eingabewert)
- $\mu_0$  : Der Soll- oder Zielwert für den Parameter  $\mu$  (Eingabewert).
- $\bar{x}$  : Der aus der Stichprobe berechnete Stichprobenmittelwert.
- $z_p$  : Das p-Quantil (inverse Verteilungsfunktion) der standardisierten Normalverteilung.

## Referenz:

Ronald E. WARPOLE, Raymond H. MEYRS, Sharon L. MYERS, Keying YE Probability and Statistics for Engineers & Scientists Neunte Auflage (2017) Pearson Education Ltd. ISBN 9781292161365 Abschnitt 10.4 Single Sample: Tests Concerning a Single Mean (Seite 356 ff) und Tabelle 10.3. auf Seite 370



## 3.1.2 t-Test 1 (1 Stichprobe, Mittelwertvergleich)

Mit diesem Testverfahren kann der Lageparameter  $\mu$  mit einem *Sollwert*  $\mu_{tar}$  verglichen werden. Es wird davon ausgegangen, dass es sich bei dem ausgewerteten Datensatz um eine Zufallsstichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit handelt. Die Werte der **Parameter µ und σ** dieser Normalverteilung sind beide **unbekannt**. Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit einem stetigen Merkmal erzeugen oder laden.

#### Den Test ausführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistenten (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <1 Grundgesamtheit> | <Normal verteilt> | <Lagetest> |
     σ unbekannt>| <t-Test 1>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zelle des gewünschten Merkmals klicken, um es auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register < Planung>:
  - Hier kann der minimal erforderliche Stichprobenumfang berechnet werden oder aber die Power des Tests mit dem aktuell verfügbaren Stichprobenumfang bewertet werden.
- Register <Testen>:
  - Den Sollwert  $\mu_{tar}$  in das Feld "Vorgegebener Wert (Zielwert)" eingeben
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.



👌 Assist	ant (test	procedure)											-	□ ×
							One subgro	oup t test						
0		Selection	Data	Planning	Test									
J		Description characteristic					Comparison of	Comparison of the expected value of a normal distribution with a specified value						
5		Bottle filling volume						Bottle filling volume						
and the second s		Subgroup :	size			1	x	99	9.40		n <sub>eff</sub>		5	
		5	п	i i i i i i i i i i i i i i i i i i i		]	S	0.	.616		s <sup>2</sup>		0.380	
	-	Arithmetic I	Mean of th	e subgroup			H <sub>0</sub> H <sub>1</sub>	The expe The expe	ected va ected va	alue of the alue of the	population is I population is s	bigger/equal t smaller than th	o the specified v	ed value /alue
*		999.4 x				Test level	lov	critica ver	l values upp	er	Test statistics			
		D C1CAA1	eviation / 1	variance or s	ubgroup	. ]	α = 5 %	-2.	13					
		0,6164414002 s s <sup>2</sup>				S*	α = 1 %	-3.	75			$\frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sqrt{n}} \sqrt{n} = -2.17643^{*}$		
		specified v	alue (targe	t value)			α = 0.1 %	-7.	17			s V''	s	
		1000	μ	0			Test results Null hypothesis	rejected	at level	α ≤ 5%				
		two-sided	test				P-Value %		4.756 %	6				
		one-sided	Ho∶µ=µ test	0	H₁∶μ≠μα	1	Confidence leve		Confidence limit					
			Haruch		Hernste		Confidence leve		lower				upper	
			110.µsµ	0	111.μ×μ(		1 - α = 95 %						1000.0	
		۲	H₀:µ≥µ	0	Η <sub>1</sub> :μ<μο	-	$1 - \alpha = 99\%$					1000		
						-	1 - u = 99.9 %						1001	
							x							
								μο						
							999.5	1	000.0		1000.5	1001.0	10	01.5
							0.00		00010			100110	10	0 110

Abbildung 11: Fenster "Assistent (Testverfahren)" mit einem Ergebnis des t-Tests für eine Stichprobe (basierend auf einer Stichprobe mit den fünf Werten 999.5, 999.3, 998.9, 1000.4, 998.9).



Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\mu=\mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\frac{ \bar{x} - \mu_0 }{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$	$> t_{1-\alpha/2,n-1}$
$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$	$< t_{\alpha,n-1}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$	> $t_{1-\alpha,n-1}$

## Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

## Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\mu=\mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\bar{x} - t_{1 - \frac{\alpha}{2}; n - 1} \left( \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \le \mu \le \bar{x} + t_{1 - \frac{\alpha}{2}; n - 1} \left( \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$
$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu \le \bar{x} + t_{1-\alpha;n-1} \left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\bar{x} - t_{1-\alpha;n-1}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \le \mu$

## Referenz:

Ronald E. WARPOLE, Raymond H. MEYRS, Sharon L. MYERS, Keying YE Probability and Statistics for Engineers & Scientists Neunte Auflage (2017) Pearson Education Ltd. ISBN 9781292161365 Abschnitt 10.4 One Samples: Tests Concerning a Single Mean (Seite 360 ff) und Tabelle 10.3. auf Seite 370



# 3.1.3 Einstichproben $\chi^2$ -Test (1 Stichprobe, Vergleich der Varianz)

Dieses Testverfahren wird verwendet, wenn der Parameter  $\sigma$  (Standardabweichung) mit einem *Sollwert* für die Standardabweichung  $\sigma_{tar}$  verglichen werden soll. Es wird davon ausgegangen, dass der ausgewertete Datensatz eine Zufallsstichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit ist. Der Wert des Parameters  $\sigma$  ist *unbekannt*. Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit einem stetigen Merkmal erzeugen oder laden.

### Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistenten (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <1 Grundgesamtheit> | <Normal verteilt> |
     <Streuungstest> | <χ<sup>2</sup>-Test>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zelle des gewünschten Merkmals klicken, um es auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Planung>:
  - Hier kann der minimal erforderliche Stichprobenumfang berechnet werden oder aber die Power des Tests mit dem aktuellen Stichprobenumfang beurteilt werden.
- Register <Testen>:
  - Den Sollwert für  $\sigma_0$  in das Feld "Vorgegebener Wert (Sollwert)" eingeben
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.



🕹 Assistant (test	procedure)				- 1	×		
		One subgroup	Chi² test					
	Selection Data Planning Test							
60	Description characteristic	Comparison o	of the variance of	f a normal disti	ribution with a specified value			
	Bottle filling volume	Bottle filling volume						
	Subgroup size	x	0.00	r	n <sub>eff</sub> 27			
منی ا	Standard deviation / variance of subgroup	H <sub>0</sub> H <sub>1</sub>	The variance of The variance of	the population	n is smaller/equal the specified value	Je		
× 😯	0,5465509571 s s <sup>2</sup>	Test level	critical lower	values upper	Test statistics			
	$0.4 \qquad \sigma_0 \qquad \sigma_{20}^2$	$\alpha = 5\%$ $\alpha = 1\%$		38.89 45.64	(n-1) <u>s<sup>2</sup></u> 48.5417**			
	two-sided test $H_0: \sigma^2 = \sigma^2_0$ $H_1: \sigma^2 = \sigma^2_0$	Test results Null hypothesis rejected at level $\alpha \le 1\%$						
	• H <sub>0</sub> : $\sigma^2 \leq \sigma^2_0$ H <sub>1</sub> : $\sigma^2 > \sigma^2_0$	P-Value %	0.467 %					
	$\bigcirc \qquad H_0: \sigma^2 \ge \sigma^2_0 \qquad H_1: \sigma^2 < \sigma^2_0$	Confidence leve	el 👘	lower	Confidence limit upper			
		1 - α = 95 %		0.447				
		$1 - \alpha = 99\%$ 1 - $\alpha = 99.9\%$		0.413				
		1 0 - 55.5 %		0.575	S			
		σ₀						
		0.40		0.45	0.50 0.55			

Abbildung 12: Fenster "Assistent (Testverfahren)" mit einem signifikanten Ergebnis für den Einstichproben-Tests  $\chi^2$ -Test einer Abfüllanlage: Die Standardabweichung der Abfüllmenge ist systematisch größer als der hier gewählte Sollwert 0.4 ml.



## Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma \neq \sigma_0$	$(n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2}$	entweder: $< \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ oder: $> \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$
$\sigma \leq \sigma_0$	$\sigma > \sigma_0$	$(n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2}$	$> \chi^2_{1-\alpha,n-1}$
$\sigma \geq \sigma_0$	$\sigma < \sigma_0$	$(n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2}$	$<\chi^2_{\alpha,n-1}$

#### Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma \neq \sigma_0$	$s \times \sqrt{\frac{\chi_{\alpha}^2}{\frac{2}{2}; n-1}} \le \sigma \le s \times \sqrt{\frac{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}}{(n-1)}}$
$\sigma \leq \sigma_0$	$\sigma > \sigma_0$	$s \times \sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha;n-1}}{(n-1)}} \le \sigma$
$\sigma \geq \sigma_0$	$\sigma < \sigma_0$	$\sigma \le s \times \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha;n-1}^2}{(n-1)}}$

Mit

*n* : Der Gesamtumfang der Stichprobe

- *s* : Standardabweichung der Stichprobe
- $\chi^2_{p;n-1}$  : p-Quantil der Chi<sup>2</sup>-Verteilung für df = n 1 Freiheitsgraden.

Referenz:

Ronald E. WARPOLE, Raymond H. MEYRS, Sharon L. MYERS, Keying YE Probability and Statistics for Engineers & Scientists Neunte Auflage (2017) Pearson Education Ltd. ISBN 9781292161365 Abschnitt 10.10 One- and Two-sample Tests Concerning Variances (Seite 386 ff)



## 3.1.4 1 Stichproben Median-Test (Wilcoxon)

Dieses Testverfahren wird verwendet, wenn der Median  $\tilde{\mu}$  mit einem *Soll-/Zielwert* für den Median  $\tilde{\mu}_0$  verglichen werden soll. Es wird davon ausgegangen, dass es sich bei dem ausgewerteten Datensatz um eine Zufallsstichprobe aus einer symmetrisch verteilten Grundgesamtheit handelt, diese muss jedoch keine Normalverteilung sein. Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit einem stetigen Merkmal erzeugen oder laden.

## Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistenten (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <1 Grundgesamtheit> | <nicht normal verteilt> | <Lagetest> |
     <1 Stichproben Mediantest (Wilcoxon)>.
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zelle des gewünschten Merkmals klicken, um es auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Testen>:
  - Den Sollwert für den Median in das Feld "Sollwert" eingeben.
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.



One subgroup Median test										
Selection Data Test										
Comparison of the Median to a specified value										
H <sub>0</sub> The median of the population is bigger/equal the specified value										
H <sub>1</sub> The median of the population is smaller than the specified value										
Test level			critical values							
		1	ower		upper	l est statistics			6	
a = 5 %				5.00						
a = 1 %				1.00			0.00000**			*
a = 0.1 %							0.0000			
Test results										
Null hypothesis rejected at level $\sigma \leq 1\%$										
two-sided test				Pop.	activ	Description		n	Median va	Target valu
O H <sub>0</sub> :ζ = ζ <sub>0</sub> H <sub>1</sub> :ζ ≠ ζ <sub>0</sub>		ζ≠ζ <sub>0</sub>	1	χ	Bottle filling volume		8	330,2	333	
one-sided test			2							
0	H₀:ζ≤ζ₀	H <sub>1</sub>	:ζ>ζ <sub>0</sub>	3						
۲	H₀:ζ≥ζ₀	H <sub>1</sub>	: ζ < ζο							

Abbildung 13: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis eines Einstichproben Mediantest (Wilcoxon) auf der Grundlage der folgenden Beispieldaten: 331.95, 328.82, 330.79, 329.64, 328.86, 331.16, 330.64, 329.76.

## Berechnung der Prüfgröße des Tests und des kritischen Wertes

Zur Berechnung der Prüfgröße wird das folgende Verfahren verwendet:

- 1) Berechnung für jeden Wert der Stichprobe die Differenz:  $d_i = x_i \tilde{\mu}_0$
- 2) Berechnung der absoluten Werte dieser Differenzen:  $d_{abs,i} = |d_i|$
- Berechnung der Ränge r<sub>i</sub> für die Absolutwerte der Unterschiede d<sub>abs.i</sub>.
   Bei mehrfach vorkommenden gleichen Werten wird der mittlere Rang für die jeweiligen Werte verwendet.
- 4) Übertragung der Vorzeichen aus den Differenzen,  $d_i$ von Schritt 1 auf die Ränge,  $r_i$ von Schritt 3. Daraus ergeben sich Ränge mit positivem Vorzeichen  $r_i^+$  und Ränge mit negativen Vorzeichen  $r_i^-$ .
- 5) Summe der Ränge mit positiven Vorzeichen  $W_{(+)}$  (falls vorhanden):

$$W_{(+)} = \sum_{i=1}^{n_+} r_i^+$$

6) Summe der Absolutwerte der Ränge mit negativem Vorzeichen  $W_{(-)}$  (falls vorhanden):

$$W_{(-)} = \sum_{i=1}^{n_{-}} |r_i^-|$$


7) Berechnung der Prüfgröße in Abhängigkeit von der Alternativhypothese und Auswahl der kritischen Werte für das entsprechende Signifikanzniveau:

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$	$\tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}_0$	$ \begin{array}{c} W_{(+)} \ wenn \ W_{(+)} < W_{(-)} \ or \\ W_{(-)} \ wenn \ W_{(-)} < W_{(+)} \end{array} \end{array} $	$< W_{n, \frac{\alpha}{2}}$
$\tilde{\mu} \leq \tilde{\mu}_0$	$\tilde{\mu} > \tilde{\mu}_0$	W <sub>(-)</sub>	< W <sub>n,α</sub>
$\tilde{\mu} \ge \tilde{\mu}_0$	$\tilde{\mu} < \tilde{\mu}_0$	W <sub>(+)</sub>	$< W_{n, \alpha}$

mit:

- $\widetilde{\mu}_0$  : Der Soll-/Zielwert des Medians (Eingabewert).
- $W_{(-)}$  : Die Summe der Absolutwerte der Ränge *mit negativem Vorzeichen*.
- $W_{(+)}$  : Die Summe der Ränge *mit positivem Vorzeichen*.
- $x_i$  : Der *i* te Wert der Stichprobendaten.
- $W_{n,\frac{\alpha}{2}}$ : Untere kritische Wert der Summe der vorzeichenbehafteten Ränge für die Wahrscheinlichkeit  $\frac{\alpha}{2}$ .
- $W_{n,\alpha}$ : Unterer kritische Wert der Summe der vorzeichenbehafteten Ränge für die Wahrscheinlichkeit  $\alpha$ .



Auf dem ersten Blick mag es überraschen, dass die Software für den zweiseitigen Fall entweder  $W_{(+)}$  oder  $W_{(-)}$  für die Prüfgröße verwendet. Das Programm übernimmt den *kleineren* der beiden Werte als Prüfgröße. Dies ist möglich, da die Verteilung der Prüfgröße eine symmetrische Verteilung um den Erwartungswert  $E(W_{(+)}) = \frac{n \times (n+1)}{4}$  ist und die Summe aller vorzeichenbehafteten Ränge folgende Bedingung erfüllt:

$$W_{(+)} + W_{(-)} = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

Dies impliziert:

- Wenn  $W_{(+)}$  klein ist, dann ist  $W_{(-)}$  groß.
- Wenn  $W_{(-)}$  klein ist, dann ist  $W_{(+)}$  groß.

Für kleine Stichprobengrößen ( $6 \le n \le 50$ ) wird der untere kritischen Wert  $W_{n,\alpha}$  oder  $W_{n,\frac{\alpha}{2}}$  aus einer Tabelle entnommen (exakte Werte). Für Stichprobenumfänge n > 50 berechnet die Software die unteren kritischen Werte mit der folgenden Näherungsformel:

$$W_{n,\alpha} = \frac{n \times (n+1)}{4} - z_{1-\alpha} \times \sqrt{\frac{1}{24}} \times n \times (n+1) \times (2n+1)$$

*n* Der Gesamtumfang der Stichprobe

 $z_{1-\alpha}$  : Das  $1-\alpha$  Quantil (inverse Verteilungsfunktion) der standardisierten Normalverteilung (einseitiger Fall). Für den zweiseitigen Fall verwendet die Software das  $1-\frac{\alpha}{2}$  Quantil.

#### Bemerkung

In der derzeit implementierten Version des Testverfahrens erfolgt im Falle von Bindungen (Bindung: mehrfach vorkommende gleiche Werte) keine Korrektur der Prüfgröße und des kritischen Wertes. Aus diesem Grund sollte der Test möglichst nicht verwendet werden, wenn für die Stichprobendaten bekannt ist, dass diese eine geringe Auflösung haben (was zu mehrfach gleichen Werten führt).

#### Referenz:

Ronald E. WARPOLE, Raymond H. MEYRS, Sharon L. MYERS, Keying YE Probability and Statistics for Engineers & Scientists Neunte Auflage Edition (2017) Pearson Education Ltd. ISBN 9781292161365 Abschnitt 16.2 Signed-Rank Test (Seite 680 ff) Tabelle A.16 Critical values for the Signed-Rank Test (Seite 779)



# 3.2 Stetige Merkmale – Tests für zwei Stichproben

In diesem Abschnitt sind die Testverfahren für zwei Stichproben (stetige Merkmale) beschrieben, die im Fenster "Assistent (Testverfahren)" enthalten sind.

# 3.2.1 t-Test P (EW) (2 gepaarte Stichproben, Mittelwertvergleich)

Dies ist eine Variante des *t-Test mit zwei Stichproben für gepaarte (=abhängige) Stichproben,* die beide aus normalverteilten Grundgesamtheiten stammen sollten. Zu beachten ist, dass jeder Wert in der ersten Stichprobe gepaart ist mit einem Partnerwert in der zweiten Stichprobe. Als anschauliches Beispiel möge das Gewicht von 10 Personen vor und nach einer Abmagerungskur dienen: In diesem Fall besteht die erste Stichprobe aus den Gewichten "vor der Abmagerungskur" und die zweite Stichprobe aus den Gewichten derselben Personen "nach der Abmagerungskur". Bei der Eingabe der Daten ist auf die zeilenweise Paarung der Gewichte für jede Person zu achten:

	Weight before diet	Weight after diet
1	71,000	71,000
2	70,000	67,000
3	69,000	68,000
4	76,000	76,000
5	79,000	77,000
6	82,000	81,000
7	89,000	88,000
8	78,000	76,000
9	74,000	73,000
10	77,000	76,000

Abbildung 14: Ausschnitt aus dem Fenster "Merkmalsmaske" mit Beispieldaten für das Körpergewicht von 10 Personen vor und nach einer Abmagerungskur. Die Werte in einer Zeile gehören jeweils zu ein und derselben Person.

Mit dem Test wird geprüft, ob sich die beiden Lageparameter  $\mu_1$  und  $\mu_2$  signifikant unterscheiden.

## Software-Dokumentation



#### Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
     <Lagetests> | <paarweise verbunden> | <t-Test P (EW)>.
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der zwei gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend zweimal auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Planung>:
  - Hier kann der Mindeststichprobenumfang berechnet werden oder aber die Power des Tests mit dem aktuell verfügbaren Stichprobenumfang beurteilt werden.
- Register <Testen>:
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.



Comparison of the expected value of two paired samples. The pairwise differences are normally distributed.									
	Weid	ght before diet				1	Neight a	fter diet	
x	1.20	n eff		10	S	0.93	2	s <sup>2</sup>	0.844
	Ho	The expect	ted value	of the diff	erences is	equal to 0			
	H <sub>1</sub>	The expec	ted value	of the diff	erences is	NOT equal t	to 0		
	Test level	lov	critical ver	values upp	per		Te	st statistics	
	α = 5 %			2.2	26				
	α = 1 %	-		3.2	25		Xd	L 412049**	
	α = 0.1 %			4.7	78		Sd	VII 4.12948**	
	Test results						- 4		
	Null hypot	thesis rejected a	at level $\alpha$	≤ 1%					
	P-Value %		0.256 %						
Confidence lavel Confidence limit									
	connuence le	uver		lov	ver			upper	
	1 - α = 95	%		0.543 1.		1.857			
	1 - α = 99	%		0.2	56	2.144			
	1 - α = 99.9	%		-0.1	189		2.589		
	E = 0			c	Ē				
<b>_</b> ,	0.0	0.5	1 1 1	1.0	1.	.5	2.0	2.5	
			Dea anti- D					-	
two-side	ed test		Pop. activ D	escription				n	
$\odot$	H <sub>0</sub> :δ=0	H <sub>1</sub> :δ≠0	1 χ ν	Veight before d	liet			10	-
one-side	ed test		2 X V	Veight after die	ŧ			10	
0	$H_0:\delta\leq 0$	H <sub>1</sub> :δ>0	3						]
0	H <sub>0</sub> :δ≥0	H <sub>1</sub> :δ<0							

Abbildung 15: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis des t-Tests für gepaarte Stichproben (t-Test P (SV)

## Berechnung der Prüfgröße und des kritischen Wertes

Nullhypothese H0	othese H0 Alternativhypothese H1 Prüfgröße		Kritischer Wert	
$\Delta \mu = 0$	$\Delta\mu  eq 0$	$t_{2 \ sided} = \frac{\left  \bar{d} \right }{\left( \frac{S_d}{\sqrt{n}} \right)}$	$> t_{1-\alpha/2;n-1}$	
$\Delta \mu \leq 0$	$\Delta \mu > 0$	$t_{1  sided} = \frac{\bar{d}}{\left(\frac{S_d}{\sqrt{n}}\right)}$	> $t_{1-\alpha;n-1}$	
$\Delta \mu \ge 0$	$\Delta \mu < 0$	$t_{1  sided} = \frac{\bar{d}}{\left(\frac{S_d}{\sqrt{n}}\right)}$	$< t_{\alpha,n-1}$	

Mit

 $d_i = x_{1.i} - x_{2.i}$  : Die Differenz des *i*Paar von Werten der Stichprobe, i = 1 to n

- *n* : Die Anzahl der Unterschiede (=Größe einer Stichprobe)
- *s*<sub>d</sub> : Die Standardabweichung der Differenzen
- t<sub>p;n-1</sub> : Das p-Quantil der t-Verteilung für df = n 1 Freiheitsgraden.



### Berechnung des Vertrauensbereiches für die Differenz $\Delta \mu$

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereich
$\Delta \mu = 0$	$\Delta \mu  e 0$	$\bar{d} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S_d}{\sqrt{n}} \le \Delta \mu \le \bar{d} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S_d}{\sqrt{n}}$
$\Delta \mu \leq 0$	$\Delta \mu > 0$	$\bar{d} + t_{\alpha,n-1} \frac{s_d}{\sqrt{n}} \le \Delta \mu$
$\Delta \mu \ge 0$	$\Delta \mu < 0$	$\Delta \mu \le \bar{d} + t_{1-\alpha,n-1} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$

#### Referenz:

Ronald E. WARPOLE, Raymond H. MEYRS, Sharon L. MYERS, Keying YE Probability and Statistics for Engineers & Scientists Neunte Auflage (2017) Pearson Education Ltd. ISBN 9781292161365 Abschnitt 10.5 Two Samples: Tests on Two Means (Seiten. 365 ff) und Tabelle 10.3. auf Seite 370.



## 3.2.2 t-Test P (2 gepaarte Stichproben, Mittelwertvergleich)

Dies ist eine Variante des *t-Tests mit zwei Stichproben für gepaarte Stichproben.* Diese Variante verwendet nur ein einziges Merkmal: Es wird davon ausgegangen, dass die Differenzen bereits berechnet wurde. Das Beispiel von oben wird erweitert um eine Spalte "Differenz". Das Verfahren "t-Test P" wird nur mit den Werten in der Spalte "Differenz" durchgeführt. Die Berechnungsschritte sind die gleichen wie zuvor.

Körpergewicht in [kg]					
vor der Abmagerungskur	nach der Abmagerungskur	Unterschied			
71	71	0			
70	67	3			
69	68	1			
76	76	0			
79	77	2			
82	81	1			
89	88	1			
78	76	2			
74	73	1			
77	76	1			

#### Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnis> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Nacheinander auf die folgenden Schaltflächen klicken:
     <stetige Verteilung> | <2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
     Lagetest> | <paarweise verbunden> | <t-Test P>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der beiden gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Planung>:
  - Hier kann der Mindeststichprobenumfang berechnet werden oder aber die Power des Tests mit dem aktuell verfügbaren Stichprobenumfang beurteilt werden.



- Register <Testen>:
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

Die Berechnung der Teststatistik und der Konfidenzgrenzen entspricht dem Verfahren des t-Tests für gepaarte Stichproben mit zwei Stichproben, "t-Test P (SV)".



## 3.2.3 u-Test 2 (2 Stichproben, Mittelwertvergleich)

Der Zwei-Stichproben u-Test setzt zwei unabhängige und zufällige Stichproben aus normalverteilten Grundgesamtheiten voraus, bei denen die **Standardabweichung**  $\sigma$  für beide Grundgesamtheiten **bekannt** ist. Dieser Test prüft auf einen Unterschied zwischen den beiden Lageparametern  $\mu_1$  und  $\mu_2$ . Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

#### Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
     Lagetest> | <σ<sub>1</sub>, σ<sub>2</sub> bekannt> | <u-Test 2>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der zwei gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Planung>:
  - Hier kann der mindestens erforderliche Stichprobenumfang berechnet werden oder aber mit dem aktuell verfügbaren Stichprobenumfang die Power des Tests beurteilt werden.
- Register <Testen>:
  - Die bekannten Werte der Standardabweichungen eingeben: Felder  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ .
  - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

# Software-Dokumentation



Two subgroups u test						
	Selection Data Planning Test					
	Description 1st characteristic	Comparison of the e	xpected value of tw	o normal distri	butions (variances of both	
1000	Subgroup size	sampl	e one		Sample two	
	11 n <sub>1</sub>	x 29.82	n <sub>eff</sub> 11	x 30	.85 n <sub>eff</sub> 11	
		σ 1.000	σ <sup>2</sup> 1.000	σ 1.0	000 σ <sup>2</sup> 1.000	
	29.818181818 x.	Ho	The expected values	of the popula	tions are equal	
		H <sub>1</sub>	The expected values	of the popula	tions are NOT equal	
	$1 \qquad \sigma_1 \qquad \sigma_2^2$	Test level	critical values	per	Test statistics	
	Description 2nd characteristic	α = 5 %	1.	96		
	Sample two	α = 1 %	2.	58	$ \overline{X}_1 - \overline{X}_2 $	
	Subgroup size	α = 0.1 %	3.	29	2.40917*	
	11 n <sub>2</sub>	Test results		1	$\frac{0}{1} + \frac{0}{2}$	
	Arithmetic Mean of the subgroup	Null hypothesis rejected at level $\alpha \leq 5\%$				
	$30.845454545  \overline{x}_2$	P-Value % 1.599 %				
		Confide			nce limit	
		Confidence level		wer	upper	
	two-sided test	1 - α = 95 %	-1.	863	-0.192	
	• $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	1-α=99 %	-2.	126	0.0711	
		1 - α = 99.9 %	-2.	430	0.376	
	$\begin{array}{c} & & H_{0}:\mu_{1} \ge \mu_{2} \\ & & H_{0}:\mu_{1} \ge \mu_{2} \\ \end{array} \qquad H_{1}:\mu_{1} < \mu_{2} \\ \end{array}$		<b>x</b> <sub>1</sub>	- x <sub>2</sub>	F = 0	
		-2.5 -2	0 -1.5 -	1.0 -0.5		

Abbildung 16: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis eines u-Tests mit zwei Stichproben.

## Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$z_{2 \ sided} = \frac{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 }{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	> $z_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$z_{1  sided} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$> z_{1-\alpha}$
$\mu_1 \ge \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$z_{1  sided} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	< <i>z</i> <sub>α</sub>

wobei

- $n_i$  : Stichprobenumfang der *i*ten Stichprobe.
- $\bar{x}_i$  : Stichprobenmittelwert der i ten Stichprobe.
- $\sigma_1, \sigma_2$  : Eingabewerte für die bekannten Standardabweichungen.
- $z_p$  p-Quantil (inverse Verteilungsfunktion) der standardisierten Normalverteilung.



Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \Delta \mu \le (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \Delta \mu$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\Delta \mu \le (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

## Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen

Referenz:

Wilfried J. DIXON, Frank J. MASSEY Jr. Einführung in die statistische Analyse Vierte Auflage (1985) McGraw-Hill Kapitel 8.4 Seite 126



## 3.2.4 t-Test 2 (2 Stichproben, Mittelwertvergleich)

Der t-Test mit zwei Stichproben geht von zwei unabhängigen und zufälligen Stichproben aus, die aus zwei normalverteilten Grundgesamtheiten entnommen wurden, wobei die Standardabweichungen  $\sigma$  beider Grundgesamtheiten *unbekannt* sind. Wie der Name des Tests andeutet, erfordert dieser Test zwei Stichprobendaten (stetige Merkmale). Dieser Test prüft auf einen Unterschied zwischen den beiden Lageparametern  $\mu_1$  und  $\mu_2$ . Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

### Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
     Lagetest> | <σ<sub>1</sub>, σ<sub>2</sub> unbekannt> | <t-Test 2>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der gewünschten zwei Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend zweimal auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Testen>:
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.



	Two subgroups t test						
	Selection Data Planning Test						
	Description 1st characteristic sample one	Comparison of the exp	pected value of two	normal distributio	ns (variances of the	e populations unkn	own)
	Subgroup size	sample	e one		Sam	nple two	
٢	📜 11 n1	x 29.82	n <sub>eff</sub>	11 <del>x</del>	30.85	n <sub>eff</sub>	11
6	Arithmetic Mean of the subgroup	s 0.576	s <sup>2</sup> 0.	332 s	0.910	s <sup>2</sup>	0.829
×	29,818181818 x <sub>1</sub>	H <sub>0</sub> -	The expected value The expected value	of the 1st BP is big of the 1st BP is sma	ger/equal the expe aller than the expe	ected value of the 2 cted value of the 2	2nd BP nd BP
	Standard deviation / variance of subgroup           0.5758787751         s1         s21	Test level	critical lower	values upper		Test statistics	
	Description 2nd characteristic	α = 5 %	-1.72				
	Sample two	α = 1 %	-2.53		(X 1	ı-x <sub>2</sub> )	2.16200**
	Subgroup size	α = 0.1 %	-3.55		$(n_1 - 1)s^2 + (n_1 - 1)s^2$	$(n_2 - 1)s^2 = n_1 + n_2$	-3.16290^^
	11 n <sub>2</sub>	Test results			$\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2}}$	-2 n <sub>1</sub> n <sub>2</sub>	
	Arithmetic Mean of the subgroup	Null hypothesis	rejected at level $\alpha$	≤ 1%			
	30,845454545 x <sub>2</sub> Standard deviation / variance of subgroup	P-Value %	0.245 %				
	0,9103445901 s <sub>2</sub> s <sup>2</sup> <sub>2</sub>	Confidence level		lower	Confidence limi	t upper	
	two-sided test	1 - α = 95 %				-0.467	
	$\bigcirc$ H <sub>0</sub> : $\mu_1 = \mu_2$ H <sub>1</sub> : $\mu_1 \neq \mu_2$	1-α=99 %				-0.206	
		1 - α = 99.9 %				0.126	
	<ul> <li>H<sub>0</sub>: µ<sub>1</sub> ≥ µ<sub>2</sub></li> <li>H<sub>1</sub>: µ<sub>1</sub> &lt; µ<sub>2</sub></li> </ul>	x 1 - x 2			-03 -02 -0	E = 0	0.2

Abbildung 17: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis eines t-Tests mit zwei Stichproben.



Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$t_{2  sided} = \frac{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 }{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	$> t_{1-\alpha/2,n_1+n_2-2}$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$t_{1  sided} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	$> t_{1-\alpha,n_1+n_2-2}$
$\mu_1 \ge \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$t_{1  sided} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	$< t_{\alpha,n_1+n_2-2}$

### Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (Fall: gleiche Varianzen)

wobei

*s<sub>p</sub>* : Die gepoolte Standardabweichung der beiden Stichproben

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

 $n_i$  : Der Stichprobenumfang der *i* Stichprobe mit i = 1, 2

 $\bar{x}_i$  : Der Mittelwert der *i*Stichprobe mit i = 1, 2

 $s_i^2$  : Die Varianz der Stichprobe der *i*Stichprobe mit i = 1, 2

 $t_{p,n_1+n_2-2}$  : Das *p*-Quantil der t-Verteilung mit  $df = n_1 + n_2 - 2$  Freiheitsgraden.

### Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen (Fall: gleiche Varianzen)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \underline{t}_{\underline{\alpha}, df} \times s_{\Delta \bar{x}} \le \Delta \mu \le (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \underline{t}_{1 - \underline{\alpha}, df} \times s_{\Delta \bar{x}}$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha,df} \times s_{\Delta \bar{x}} \le \Delta \mu$
$\mu_1 \ge \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\Delta \mu \le (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{1-\alpha,df} \times s_{\Delta \bar{x}}$

mit

$$df = n_1 + n_2 - 2$$
 : Freiheitsgrade

$$s_{\Delta \bar{x}} = s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$



Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert	
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$t_{2 \ sided} = \frac{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 }{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	$> t_{1-lpha/2, u}$	
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$t_{1 \ sided} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	$> t_{1-\alpha,\nu}$	
$\mu_1 \ge \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$t_{1  sided} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	$< t_{\alpha,\nu}$	

### Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (Fall: ungleiche Varianzen)

v : Modifizierte Freiheitsgrade



#### Berechnung der Vertrauensbereiche (Fall: ungleiche Varianzen)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\frac{\alpha}{2},\nu} \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \le \Delta\mu \le (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{1 - \frac{\alpha}{2},\nu} \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha,\nu} \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \le \Delta \mu$
$\mu_1 \ge \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\Delta \mu \le (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{1 - \alpha, \nu} \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Referenz:

Ronald E. WARPOLE, Raymond H. MEYRS, Sharon L. MYERS, Keying YE Wahrscheinlichkeit und Statistik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Neunte Auflage (2017) Pearson Education Ltd. ISBN 9781292161365 Kapitel 10.5 Tests auf zwei Mittelwerte (Seite. 363 ff) Tabelle 10-3 Tests bezüglich der Mittelwerte (Seite 370)



# 3.2.5 F-Test (2-Stichproben, Vergleich der Varianzen)

Der 2-Stichproben-F-Test setzt zwei unabhängige Stichproben aus normalverteilten Grundgesamtheiten voraus. Das Verfahren prüft auf einen Unterschied zwischen den beiden Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$ . Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

#### Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
     <Streuungstest> | <F-Test>.
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der gewünschten zwei Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Planung>:
  - Hier kann der mindestens erforderliche Stichprobenumfang ermittelt werden oder aber mit dem verfügbaren Stichprobenumfang die Power des Tests beurteilt werden.
- Register <Testen>:
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen



## Software-Dokumentation

🐮 Assista	nt (test	procedure)									—	□ ×
					Two samples F	test						
		Selection Dat	a Planning	Test								
	V	Description 1st ch	naracteristic		Compa	rison of	f the varianc	es of two r	normal distr	ibutions		
100		Dottle milling voidi			Bottle filling v	olume	(Filler 1)	Bo	ttle Filling v	olume (F	iller 2	)
	-	Subgroup size			n <sub>eff</sub>		75	n et	ff	7	5	
	1	75	<b>D</b> 1		s 0.10127	s <sup>2</sup>	0.0103	S	0.144	s <sup>2</sup>	0.0	208
		Standard deviatio	n / variance of su	bgroup	H <sub>0</sub> H <sub>1</sub>	The va The va	riances of th riances of th	e populati e populati	ions are equ ions are NO	al Fegual		
*	()	0.1012744856 s1 s <sup>2</sup> 1			Test level	lov	critical value	es oper	Tes	t statisti	cs	
	Description 2nd characteristic Bottle Filling volume (Filler 2) Subgroup size				$\alpha = 5\%$	0.0	0.63 1.4		58			
					$\alpha = 1\%$	0.5	55	1.83	\$1 <sup>2</sup>	s1 <sup>2</sup>		
				α = 0.1 %	0.4	46	2.18					
		75	<b>D</b> 2		Test results							
					Null hypothesis r	ejected	l at level α	≤ 1%				
		Standard deviatio 0,1441545192	n / variance of su	s²2	P-Value %	(	0.273 %					
		two-sided test			Confidence lev	el Confide			nfidence lim	ence limit		
			ι = σ <sup>2</sup> ο Η ι	$\sigma^2 + \pi \sigma^2$	$1 - \alpha = 95$ %		0	.312		0.78	1	
		one-sided test	1-0 2 11	.0 1 - 0 2	1 - α = 99 %	,	C	.269		0.90	4	
			и с <del>п</del> <sup>2</sup> а – Ни	· σ <sup>2</sup> · > σ <sup>2</sup> ·	1 - α = 99.9 %	6	C	.227		1.07	4	
		<ul> <li>Η<sub>0</sub>:σ<sup>2</sup></li> </ul>	12σ <sup>2</sup> 2 H1	:σ <sup>2</sup> 1<σ <sup>2</sup> 2		s²	1 / S <sup>2</sup> 2			E = 1		
					0.2 0.3	0.4	0.5 0.6	0.7	0.8 0.9	1.0	1.1	

*Abbildung 18: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt exemplarisch ein Ergebnis für den Zweistichproben F-Test – Die Varianzen des Füllvolumens zweier Füllköpfe sind signifikant verschieden.* 



### Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\sigma_1 = \sigma_2$	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	Entweder > $F_{1-\alpha/2;n_1-1,n_2-1}$ oder < $F_{\alpha/2;n_1-1,n_2-1}$
$\sigma_1 \leq \sigma_2$	$\sigma_1 > \sigma_2$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	$> F_{1-\alpha;n_1-1,n_2-1}$
$\sigma_1 \ge \sigma_2$	$\sigma_1 < \sigma_2$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	$< F_{\alpha;n_1-1,n_2-1}$

### Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\sigma_1 = \sigma_2$	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},n_{1}-1,n_{2}-1}} \times \frac{s_{1}^{2}}{s_{2}^{2}} \le \frac{\sigma_{1}^{2}}{\sigma_{2}^{2}} \le \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_{1}-1,n_{2}-1}} \times \frac{s_{1}^{2}}{s_{2}^{2}}$
$\sigma_1 \leq \sigma_2$	$\sigma_1 > \sigma_2$	$\frac{1}{F_{1-\alpha,n_1-1,n_2-1}} \times \frac{s_1^2}{s_2^2} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$
$\sigma_1 \ge \sigma_2$	$\sigma_1 < \sigma_2$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{1}{F_{\alpha,n_1-1,n_2-1}} \times \frac{s_1^2}{s_2^2}$

Mit:

 $s_1^2$  : Varianz der ersten Stichprobe

 $s_2^2$  : Varianz der zweiten Stichprobe

 $n_1$  : Stichprobenumfang der ersten Stichprobe

*n*<sub>2</sub> : Stichprobenumfang der zweiten Stichprobe

 $F_{p,n_1-1,n_2-1}$  : p-Quantil der F-Verteilung für  $df_1 = n_1 - 1$  und  $df_2 = n_2 - 1$  Freiheitsgrade.



# 3.2.6 Differenzen-Median-Test (2 gepaarte Stichproben, Vergleich Median)

Dieses Testverfahren setzt zwei **gepaarte** Stichproben voraus. Ein ebenfalls weit verbreiteter Name für dieses Testverfahren ist *Wilcoxon-Vorzeichen-Rank-Test für zwei verbundene Stichproben.* Dieser Test prüft auf einen Unterschied zwischen den beiden Medianwerten  $\tilde{\mu}_1$  und  $\tilde{\mu}_2$ . Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

#### Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <Stetige Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <Nicht normal verteilt> |
     <Lagetest> | <paarweise verbunden> | <ζ-Test P>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der zwei gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Testen>:
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.



	Differences in median test											
Selection	Data	Test										
				Comparis	on of t	the Median of th	e differences	of two subgroups				
		W	eight before d	iet			Weight after diet					
x	x 76.5 n <sub>eff</sub> 0				0	x	76.0	nerr	0			
	H <sub>0</sub> The median of the differences is smaller/equal 0											
	H1		The me	dian of the	differe	nces is bigger th	an 0					
	T. (1)			critical values				Test statistics				
	restiev	e		lower upp			ber	TESUSICIS				
	a = 5 %	6		5.00	5.00							
	a = 1 %	6		1.00			-	0.00000**				
	a = 0.1	%					-	0.0000				
	Test resu	ilts										
		Null hy	pothesis rejec	ted at level	a ≤ 1º	%						
two-sideo	d test			Pop.	activ	Description			n			
0	O H <sub>0</sub> :ζ = 0 H <sub>1</sub> :ζ ≠ 0			1	X	Weight before d	liet		10			
one-side	d test			2	X	Weight after die	t		10			
۲	H₀:ζ≤0		H <sub>1</sub> :ζ>0	3								

Abbildung 19: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis eines Wilcoxon-Signed-Rank-Tests mit zwei Stichproben.

#### Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

H<sub>1</sub>:ζ<0

Um die Prüfgröße zu erhalten, werden die folgenden Berechnungsschritte durchgeführt:

1) Berechnung der Differenzen:  $d_i = x_{1,i} - x_{2,i}; i = 1, 2, ..., n$ 

 $H_0: \zeta \ge 0$ 

0

2) Berechnung der absoluten Werte der Differenzen:  $|d_i|, i = 1, 2, ..., n$ 

Die übrigen Berechnungsschritte und Testentscheidungen sind die gleichen wie beim Wilcoxon-Signed-Rank-Test mit einer Stichprobe. Siehe Abschnitt 3.1.4 auf Seite 34.



# 3.2.7 Mann-Whitney U-Test (2 Stichproben, Vergleich Median)

Dieses Testverfahren geht von zwei *unabhängigen* Stichproben aus. Diese Prozedur prüft auf eine Differenz zwischen den beiden Medianwerten  $\tilde{\mu}_1$  und  $\tilde{\mu}_2$ . Der Test erfordert Stichprobendaten von zwei stetigen Merkmalen, die aus zwei Grundgesamtheiten mit derselben Form stammen (keine Anforderung für normalverteilte Grundgesamtheiten). Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

#### Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <Nicht normal verteilt> |
     Lagetest> | <unabhängige Stichprobe> | <U-Test>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der beiden gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Testen>:
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test uaszuführen.



	Two subgroups location test											
Selection	Data	Test										
			Compar	rison of the	e locatio	on of tv	vo arbitrary con	tinuous distrib	outions (Mann-Whitney-Wi	lcoxon)		
Filler 1 Filler 2												
x	:	330.9410	)	nerr			25	x	333.4220	nerr		25
H <sub>0</sub> The median of the 1st BP is bigger/equal the median of the 2nd BP												
	H <sub>1</sub>		Т	'he median	of the	1st BP i	s smaller than t	he median of	the 2nd BP			
Test level						critica	al values			Test stati	etice	
resciever			le	ower upper			ber	TEST STRUSTES				
a = 5 % -1.64												
	a = 1 %			-	2.33			-5 2290.7***				
	a = 0.1 °	%		-	3.09		-	5.22507				
	Test resu	lts										
		Null hy	pothesis r	ejected at	level o	1≤0,1	%					
	P-Value 9	%			0.0	00 %						
two-sided	test				Pop.	activ	Description			n	Median va	
0	$H_0: \zeta_1 = \zeta_2$		H1:ζ1	≠ζ <sub>2</sub>	1	χ	Filler 1			25	330,941	
one-sided	one-sided test			X	Filler 2			25	333,422			
0	H <sub>0</sub> :ζ <sub>1</sub> ≤ζ <sub>2</sub>	1	$H_1: \boldsymbol{\zeta}_1$	>ζ2	3							
۲	H <sub>0</sub> :ζ <sub>1</sub> ≥ζ <sub>2</sub>	!	$H_1: \boldsymbol{\zeta}_1$	< ζ2								

Abbildung 20: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis eines Mann-Whitney-U-Tests mit zwei Stichproben.



#### Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte

Die folgenden Berechnungsschritte werden verwendet, um die Prüfgröße zu ermitteln:

- 1) Bestimmen des Stichprobenumfangs der beiden Stichproben:  $n_1$  und  $n_2$ .
- 2) Kombinieren beider Stichproben zu einer Gesamt-Stichprobe.
- 3) Berechnung der Ränge für die kombinierte Gesamt-Stichprobe.
- Bei Bindungen (Bindungen = derselbe Wert kommt in der Stichprobe mehrfach vor) wird der mittlere Rang den betreffenden Werten zugeordnet. Die Häufigkeit der Bindungen wird für jede Bindungsgruppe ausgezählt.
- 5) Berechnung der Summe der Ränge für die Werte, die zur ersten Stichprobe gehören: R<sub>1</sub>
- 6) Berechnung der Summe der Ränge für die Werte, die zur zweiten Stichprobe gehören: R2
- 7) Berechnung der Statistik des Tests:

$$U_1 = n_1 \times n_2 + \frac{n_1 \times (n_1 + 1)}{2} - R_1$$

$$U_2 = n_1 \times n_2 + \frac{n_2 \times (n_2 + 1)}{2} - R_2$$

wobei

*R*<sub>1</sub> : Summe der Ränge der ersten Stichprobe.

- *R*<sub>2</sub> : Summe der Ränge der zweiten Stichprobe.
- $n_1$  : Stichprobenumfang der ersten Stichprobe.
- $n_2$  : Stichprobenumfang der zweiten Stichprobe.

Berechnung  $U = min\{U_1; U_2\}$ . Dies ist nur eine vorläufige Prüfgröße, die zur Berechnung der endgültigen transformierten Prüfgröße verwendet wird:

8) Berechnen der endgültigen transformierten Prüfgröße:



Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$	$\tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2$	$z = \frac{\left  U - \frac{n_1 \times n_2}{2} \right }{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2 \times (N+1)}{12}}}$	$> z_{1-rac{lpha}{2}}$
$\tilde{\mu}_1 \leq \tilde{\mu}_2$	$\tilde{\mu}_1 > \tilde{\mu}_2$	$z = \frac{U - \frac{n_1 \times n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2 \times (N+1)}{12}}}$	$> z_{1-\alpha}$
$\tilde{\mu}_1 \geq \tilde{\mu}_2$	$\tilde{\mu}_1 < \tilde{\mu}_2$	$z = \frac{U - \frac{n_1 \times n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2 \times (N+1)}{12}}}$	< <i>z</i> <sub>α</sub>

## Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (Fall: keine Bindungen vorhanden)

Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (Fall: Bindungen vorhanden)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$	$\tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2$	$z = \frac{\left  U - \frac{n_1 \times n_2}{2} \right }{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2}{N \times (N-1)} \times \left( \frac{N^3 - N}{12} - \sum_{i=1}^g \frac{t_i^3 - t_i}{12} \right)}}$	$> z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\tilde{\mu}_1 \leq \tilde{\mu}_2$	$\tilde{\mu}_1 > \tilde{\mu}_2$	$z = \frac{U - \frac{n_1 \times n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2}{N \times (N-1)} \times \left(\frac{N^3 - N}{12} - \sum_{i=1}^g \frac{t_i^3 - t_i}{12}\right)}}$	$> z_{1-\alpha}$
$\tilde{\mu}_1 \geq \tilde{\mu}_2$	$\tilde{\mu}_1 < \tilde{\mu}_2$	$z = \frac{U - \frac{n_1 \times n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2}{N \times (N-1)} \times \left(\frac{N^3 - N}{12} - \sum_{i=1}^g \frac{t_i^3 - t_i}{12}\right)}}$	$< z_{\alpha}$

Mit

 $N = n_1 + n_2$  : Summe der beiden Stichprobenumfänge.

*g* : Anzahl der verbundenen Gruppen.

t<sub>i</sub>

anzam der verbandenen Grappen.

: Anzahl der gebundenen Werte in der i - ten Bindungsgruppe.



# 3.2.8 Rangdispersions-Test (2 Stichproben, Vergleich der Streuung)

Dieses Testverfahren setzt zwei *unabhängige* und zufällig entnommene Stichproben voraus. Eine normalverteilte Grundgesamtheit wird nicht vorausgesetzt, *jedoch sollte der Unterschied zwischen den beiden Medianwerten gering sein*. Andernfalls wird das Ergebnis dieses Testverfahrens sehr unzuverlässig:

 Je größer die Differenz zwischen den beiden Medianwerten ist, desto größer ist das β-Risiko dieses Testverfahrens, einen Unterschied in der Streuung nicht zu erkennen, wenn in Wahrheit ein Unterschied besteht.

Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

#### Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• <Ergebnisse> | <Testverfahren> | <Assistent (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <2 Grundgesamtheiten> | <Nicht normal verteilt> |
     <Streuungstest> | <Rangdispresions Test>.
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der zwei gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Testen>:
  - Die gewünschte Alternativhypothese auswählen.
  - Abschließend auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.



	i wo subgroup rank variation test										
Selection	Data Tes	st									
	Comparison of the dispersion of two arbitrary continous distributions (rank test of dispersion)										
Filler 1 Filler 2											
~		Filler 1			~	гш 					
X	332.8	370 n	81	25	X	333.160	nerr	21			
H <sub>0</sub> The dispersions of the populations are equal											
	H <sub>1</sub>	The dis	persions of the po	pulations are NO	T equal						
	Testlevel		critic	al values			Test statistics				
	l est level		lower upp			lest statistics					
a = 5 %				1.9	96						
	a = 1 %			2.5	58		(n++n2+1) +- 1				
	a = 0.1 %			3.2	29	(*) 3.63174****					
	Test results						$\frac{1+n_2+1}{3}$				
	Nul	hypothesis rejecte	d at level o ≤ 0.1	%							
	P-Value %		0.0282 %								
two-sided	test		Pop. activ	Description			n				
۲	$H_0: \zeta_1 = \zeta_2$	$H_1: \zeta_1 \neq \zeta_2$	1 X	Filler 1			25				
one-sided test 2 ¥ Fi				Filler 2	iller 2 21						
0	$H_0: \zeta_1 \leq \zeta_2$	$H_1: \zeta_1 > \zeta_2$	3								
0	$H_0: \zeta_1 \ge \zeta_2$	H <sub>1</sub> :ζ <sub>1</sub> <ζ <sub>2</sub>									

Abbildung 21: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis eines Rangdispersions-Tests.



#### Berechnung der statistischen Werte des Tests und der kritischen Werte

Die folgenden Berechnungsschritte werden verwendet, um die Statistik des Tests zu erhalten:

- 1) Bestimmung des Stichprobenumfang für beide Stichproben:  $n_1$  und  $n_2$
- 2) Beide Stichproben zu einer gemeinsamen Stichprobe kombinieren.
- 3) Sortiere die Daten der kombinierten Stichprobe aufsteigend.
- 4) Berechnung des Stichprobenumfangs der kombinierten Stichprobe:  $N = n_1 + n_2$
- 5) Berechnung der Ränge für die kombinierte Stichprobe.

Wenn N gerade ist:

 $r_i = \begin{cases} 2i & \text{wenn } i \text{ gerade } ist \text{ und } 1 < i \le N/2 \\ 2(N-i)+2 & \text{wenn } i \text{ gerade } ist \text{ und } N/2 < i \le N \\ 2i-1 & \text{wenn } i \text{ ungerade } ist \text{ und } 1 \le i \le N/2 \\ 2(N-i)+1 & \text{wenn } i \text{ ungerade } ist \text{ und } 1 < i < N/2 \end{cases}$ 

Wenn N ungerade ist:

 $r_{i} = \begin{cases} 2i & \text{wenn } i \text{ gerade } ist \text{ und } 1 < i < N/2 \\ 2(N-i)+1 & \text{wenn } i \text{ gerade } ist \text{ und } N/2 < i < N \\ 2i-1 & \text{wenn } i \text{ ungerade } ist \text{ und } 1 \leq i \leq N/2 \\ 2(N-i)+2 & \text{wenn } i \text{ ungerade } ist \text{ und } 1/2 < i \leq N \end{cases}$ 

- 6) Berechnung der Summe der Ränge für die Daten der ersten Stichprobe: R<sub>1</sub>
- 7) Berechnung der Summe der Ränge für die Daten der zweiten Stichprobe: R<sub>2</sub>
- 8) Wenn es **keine** Gleichheit gibt und  $2 \times R_1 > n_1 \times (N + 1)$ ist die Teststatistik:

$$z = \frac{2 \times R_1 - n_1 \times (N+1) - 2}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2 \times (N+1)}{3}}}$$

Wenn es **keine** mehrfach gleichen Werte vorhanden sind und die Bedingung  $2 \times R_1 \le n_1 \times (N + 1)$ erfüllt ist, so lautet die Prüfgröße:

$$z = \frac{2 \times R_1 - n_1 \times (N+1) + 1}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2 \times (N+1)}{3}}}$$

9) Kommen mehrfach gleiche Werte vor (Bindungen), so wird eine Bindungskorrektur berechnet:  $tie_{adj} = \frac{4 \times n_1 \times n_2 \times (S_1 - S_2)}{N \times (N - 1)}$ 

und der Nenner der Prüfgröße wird entsprechend angepasst:

$$\sqrt{\frac{[n_1 \times n_2 \times (N+1)]}{3} - tie_{adj}}$$

wobei

- *S*<sub>1</sub> : *Summe der quadrierten Ränge* für die Bindungen.
- *S*<sub>2</sub> : Summe der quadrierten mittleren Ränge für die Bindungen.



Wie erwähnt, führt das Programm bei Bindungen (Bindung: mehrfaches Vorkommen des gleichen Wertes) eine Korrektur der Prüfgröße durch. *Die Bindungskorrektur wird in der Formel für die Prüfgröße jedoch nicht angezeigt*. Diese Tatsache sollte beachtet werden, wenn man das Ergebnis für die Prüfgröße mit einer Handrechnung nachvollziehen möchte. In neueren Versionen des Programms qs-STAT (14.0.4 und höher) wird die Bindungskorrektur durch ein in Klammern gesetztes Astrix-Symbol vor der Formel gekennzeichnet. In den älteren Versionen von qs-STAT (kleiner als die Version 14.0.4) wird das Asterix-Symbol noch nicht zur Kennzeichnung für die Bindungskorrektur verwendet.

Referenz:

Lothar SACHS, Jürgen HEDDERICH Angewandte Statistik 17. Ausgabe 2020 ISBN 978-3662-62293-3 Springer Kapitel 7.4.2 Rangdispersionstest von Siegel und Tukey Seite 540 ff

Software-Dokumentation



# 3.3 Stetige Merkmale – Tests für mehrere Stichproben

In diesem Abschnitt sind die Testverfahren für multiple Stichproben (stetige Merkmale) beschrieben, die sich innerhalb des Fensters "Assistent (Testverfahren)" befinden.

# 3.3.1 Äquivalenztest mit 1 Stichprobe

Ein t-Test mit einer Stichprobe auf Äquivalenz oder ein t-Test mit einer Stichprobe auf Nichtunterlegenheit wird verwendet, um zu zeigen, dass der Parameter  $\mu$  der Grundgesamtheit *praktisch* nahe genug an einem Zielwert  $\mu_{tar}$  liegt, um annehmbar zu sein: *Gleichheit, bis auf eine praktisch irrelevante Abweichung*.

Für die Differenz  $\Delta = \mu - \mu_{tar}$  werden Grenzwerte festgelegt:

- Zweiseitig nach unten und oben im Falle der Äquivalenz
- Einseitig nach unten oder einseitig nach oben im Falle der Nichtunterlegenheit.

Bei einem *zweiseitigen* 1-Stichproben Äquivalenz t-Test gibt es *zwei Nullhypothesen* und somit *zwei einseitige* t-Tests (das "ODER" ist hier exklusiv):

Für die Differenz  $\Delta = \mu - \mu_{tar}$  formuliert man die beiden Nullhypothesen

 $H0_{lower}: \Delta \leq b_L ODER \quad H0_{upper}: \Delta \geq b_U$ 

gegen die Alternativhypothese H1:

 $H1: b_L < \Delta < b_U$ 

mit:

: Eingabewert für die untere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz  $\Delta = \mu - \mu_0$ .

 $b_U$  : Eingabewert für die obere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz  $\Delta = \mu - \mu_0$ .

Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit einem stetigen Merkmal erzeugen oder laden.

#### Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <>2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
     <Lagetest> | <Äquivalenztest mit 1 Stichprobe>

## Software-Dokumentation



- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zelle des gewünschten Merkmals klicken, um es auszuwählen.
  - Auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (➔) klicken.
- Register <Testen>:
  - Falls erforderlich: Eingabe der unteren Äquivalenzgrenze  $b_L$ .
  - Falls erforderlich: Eingabe der oberen Äquivalenzgrenze *b*<sub>U</sub>.
  - Auswahl der gewünschten Alternativhypothese.
  - Klicke auf das "Taschenrechner"-Symbol, um den Test auszuführen.

	Equivalen	ce test with o	ne sample								
Selection Data Planning Test											
Description 1st characteristic			Equivalence tes	t with one sa	mple						
Filling volume (Filler 1)											
			Filling volu	ime (Filler 1)							
30 n <sub>1</sub> 1.5 b <sub>U</sub>	x	332	.73	1	ו eff	30	)				
	S	1.2	64		s <sup>2</sup>	1.59	97				
332,72666666 x 1 333 x 1gt	Ho	The differenc	e is smaller or equa	than/to the	lower limit or larger o	r equal than/to	o the upper limit				
H <sub>1</sub> The difference is within the "upper limit - lower limit" interval											
1,2635290844 s1 -1,5 bL	Test level	lowe	critical values r up	per		Test statistics					
	α = 5 %	-1,699	13 1,6	9913							
	α = 1 %	-2,462	02 2,4	2,46202		D - bL 5 21742***					
	α = 0.1 %	-3,39624 3,39		9624	s1 <sup>2</sup>						
	Test results				¥	n <sub>1</sub>					
	Die Äquivalenz i	st nachweisba	ar!!!(α ≤ 0,1%)		D	D -0.27333					
	b <sub>U</sub> 1.50000	dfu	29	tu	-7.68716	Ρυ	0.00000				
	b <sub>L</sub> -1.50000	dfL	29	tL	5.31743	рı	0.00001				
two-sided test	Confidence level	Confidence limit									
⊕ H <sub>0</sub> :D≤b⊥ D≥b∪ H <sub>1</sub> :b⊥ <d<b∪ <="" p=""></d<b∪>	1 - α = 95 %		-0	.665		0.119	)				
one-sided test	1 - α = 99 %		-0	.841		0.295	5				
H <sub>0</sub> :D≤b <sub>L</sub> H <sub>1</sub> :D>b <sub>L</sub>	1 - α = 99.9 %		-1	.057		0.510					
O H₀:D≥bu H₁:D <bu< td=""><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></bu<>											
	D		υu				tL				
		_									
							┝━┯┷┯┯┯┛				
	-1 0		1 2		3 4		5				

Abbildung 22: Fenster "Assistent (Testverfahren)" mit dem Ergebnis eines 1-Stichproben-Äquivalenztest.



Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße(n)	Kritischer Wert / kritische Werte	
$\Delta \leq b_L$	b - b	$\frac{(\bar{x} - \mu_{tar}) - b_L}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$	> $t_{1-\alpha;n-1}$	
$\Delta \ge b_U$	$b_L < \Delta < b_U$	$\frac{(\bar{x} - \mu_{tar}) - b_U}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$	oder $< t_{\alpha;n-1}$	
$\Delta \leq b_L$	$\Delta > b_L$	$\frac{(\bar{x} - \mu_{tar}) - b_L}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$	> $t_{1-\alpha;n-1}$	
$\Delta \ge b_U$	$b_U < \Delta$	$\frac{(\bar{x} - \mu_{tar}) - b_U}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$	$< t_{\alpha;n-1}$	

## Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (grün: Äquivalenztest, blau: Nichtunterlegenheit)

# Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen (grün: Äquivalenz, blau: Nichtunterlegenheit)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\begin{array}{l} \Delta \leq b_L \\ \text{oder} \\ \Delta \geq b_U \end{array}$	$b_L < \Delta < b_U$	$(\bar{x} - \mu_{tar}) + t_{\alpha;n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}} \le \Delta \le (\bar{x} - \mu_{tar}) + t_{1-\alpha;n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}}$
$\Delta \leq b_L$	$\Delta > b_L$	$(\bar{x} - \mu_{tar}) + t_{\alpha;n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}} \le \Delta$
$\Delta \ge b_U$	$b_U < \Delta$	$\Delta \le (\bar{x} - \mu_{tar}) + t_{1-\alpha;n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}}$

mit:

 $\Delta = \mu - \mu_{tar}$ 

 $\mu_{tar}$  : Soll-/Zielwert des Parameters  $\mu$ 

- $\bar{x}$  : Mittelwert der Stichprobe
- *s* : Standardabweichung der Stichprobe
- *n* : Stichprobengröße
- : Eingabewert für die untere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz  $\Delta = \mu \mu_{tar}$ .
- $b_U$  : Eingabewert für die obere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz  $\Delta = \mu \mu_{tar}$ .

 $t_{1-\alpha;n-1}$ :  $(1-\alpha)$ -Quantil der (zentralen) t-Verteilung mit df = n-1 Freiheitsgraden.



# 3.3.2 Äquivalenztest mit 2 Stichproben

Ein t-Test auf Äquivalenz mit zwei Stichproben oder ein t-Test auf Nichtunterlegenheit mit zwei Stichproben wird verwendet, um zu zeigen, dass die beiden Lageparameter  $\mu_1$  und  $\mu_2$  praktisch so nahe beieinander liegen, dass diese als gleichwertig angesehen werden können: *Gleichheit, bis auf eine praktisch irrelevante Abweichung.* 

Für die Differenz  $\Delta = \mu_1 - \mu_2$  der beiden Lageparameter werden Grenzwerte festgelegt:

- Zweiseitig nach unten und oben im Falle der Äquivalenz
- *Einseitig* nach unten oder einseitig nach oben im Falle der Nichtunterlegenheit.

Bei einem *zweiseitigen* t-Test auf *Äquivalenz* gibt es *zwei Nullhypothesen* und somit *zwei einseitige* t-Tests (das "ODER" ist hier exklusiv):

Für die Differenz  $\Delta = \mu_1 - \mu_2$  formuliert man die beiden Nullhypothesen

 $H_{0.unten}: \Delta \leq b_L \ ODER \ H_{0.oben}: \Delta \geq b_U$ 

gegen die Alternativhypothese

 $H_1: b_L < \Delta < b_U$ 

mit:

- *b*<sub>L</sub> : Eingabewert für die untere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz  $\Delta = \mu_1 \mu_2$ .
- $b_U$  : Eingabewert für die obere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz  $\Delta = \mu_1 \mu_2$ .

Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

#### Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <>2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
     <Lagetest> | <Äquivalenztest mit 2 Stichproben>.
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der zwei gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Testen>:
  - Eingabe der unteren Äquivalenzgrenze  $b_L$  (falls erforderlich).



- Eingabe der oberen Äquivalenzgrenze  $b_U$  (falls erforderlich).
- Auswahl der gewünschten Alternativhypothese.
- Klicke auf das "Taschenrechner"-Symbol, um den Test auszuführen.

Equivalence test with two samples									
Selection Data Planning Test									
Description 1st characteristic	Description 1st characteristic Equivalence test with two samples								
Filling volume (Filler 1)									
	Filling volume (Filler 1)								
30 n <sub>1</sub> 1,5 b <sub>U</sub>	x 332.73	n <sub>eff</sub>		30	x	331.85	n <sub>eff</sub>	30	
	s 1.264	s <sup>2</sup>	1.	597	S	1.273	s <sup>2</sup>	1.621	
332.7266666€ x̄₁	Ho	The differe	nce is small	er or equal	than/to the	lower limit or larger	or equal than/to	o the upper limit	
	H <sub>1</sub>	The differe	nce is withi	n the "uppe	limit - low	er limit" interval			
1,2635290844 s1 -1.5 bL	Critical values		Test statistics	est statistics					
Description 2nd characteristic		lov	lower upp		per				
Filling volume (Filler 2)	α = 5 %	-1,6	7155	1,67	155				
	α = 1 %	-2,39238		2,39	2,39238		D - bu -1.91348*		
30 n <sub>2</sub> equality of variance *	α = 0.1 %	-3,2	3682	3,23	682	$(n_1 - 1)s_1^2 +$	(n <sub>2</sub> -1)s <sub>2</sub> <sup>2</sup> 1	1	
	Test results					¥ n₁+n	ı₂-2 Vn₁	n <sub>2</sub>	
331,85333333 x <sub>2</sub>	Die Äquivalenz ist nachweisbar!!! ( $\alpha \le 5\%$ )				D	0	.87333		
	bu 1.50000	dfu		58	tu	-1.91348	Pu	0.03031	
1,2732617175 s2	b <sub>L</sub> -1.50000	dfL		58	tL	7.24680	Pι	0.00000	
hun stille dike sk	Confidence level	Confidence level		Confiden			ence limit		
H₀:D≤b;  D≥b; H₁:b; < D b; H₁:b; H₁:b; H₁:b; < D b; H₁:b; H₁:b; H₁:b; < D b; H₁:b; H₁:b	1		lower			upper			
one-sided test	1 - α = 95 %	0.		320		1.421			
H <sub>0</sub> :D≤bL     H <sub>1</sub> :D>bL	$1 - \alpha = 99\%$		-0.187			1,037			
O H <sub>0</sub> :D≥bu H <sub>1</sub> :D <bu< p=""></bu<>	1 0 55.5 70			0.	107		1.555		
	bL tu					D	bu		
							1		
	-2.0 -1.5	-1.0	-0.5	0.	0	0.5 1.0	1.5	2.0	

Abbildung 23: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis eines Zweistichproben-Äquivalenztests für die Abfüllmengen zweier Füllköpfe einer Abfüllanlage.



Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\begin{array}{l} \Delta \leq b_L \\ \text{oder} \\ \Delta \geq b_U \end{array}$	$b_L < \Delta < b_U$	$\frac{D - b_L}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \times \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ $\frac{\text{oder}}{D - b_U}$ $\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \times \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$	$> t_{1-lpha;n_1+n_2-2}$ oder $< t_{lpha;n_1+n_2-2}$
$\Delta \leq b_L$	$\Delta > b_L$	$\frac{D - b_L}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \times \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	$> t_{1-\alpha;n_1+n_2-2}$
$\Delta \ge b_U$	$b_U < \Delta$	$\frac{D - b_U}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \times \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	$< t_{\alpha;n_1+n_2-2}$

# Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (grün: Äquivalenz, blau: Nichtunterlegenheit)

Mit:

$$D = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

Bei ungleichen Varianzen ist der Nenner der Statistik des Tests zu ersetzen durch:

$$\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

und bei der Berechnung der kritischen Werte auf der Grundlage der Quantile der t-Verteilung verwenden wir die modifizierten Freiheitsgrade v:

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1 - 1)} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2 - 1)}}$$



Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauensbereichsgrenzen
$\begin{array}{l} \Delta \ \leq \ b_L \\ \text{oder} \\ \Delta \geq \ b_U \end{array}$	$b_L < \Delta < b_U$	$D + t_{\alpha;df} \times se_{\Delta} \leq \Delta \leq D + t_{1-\alpha;df} \times se_{\Delta}$
$\Delta \leq b_L$	$\Delta > b_L$	$D + t_{\alpha;df} \times se_{\Delta} \leq \Delta$
$\Delta \ge b_U$	$b_U < \Delta$	$\Delta \leq D + t_{1-\alpha;df} \times se_{\Delta}$

#### Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen (grün: Äquivalenz, blau: Nichtunterlegenheit)

mit:

$$\Delta = \mu_1 - \mu_2$$

$$D = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

 $se_{\Delta} \qquad \text{bei gleichen Varianzen } \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \times \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \text{ und}$ im Falle ungleicher Varianzen  $\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$ 

 $\bar{x}_i$  : Mittelwert der *i* –ten Stichprobe

 $s_i^2$  : Varianz der *i* –ten Stichprobe

 $n_i$  : Stichprobenumfang der i –ten Stichprobe

: Eingabewert für die untere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz  $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ .

 $b_U$  : Eingabewert für die obere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz  $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ .

 $t_{1-\alpha;df}$ :  $(1-\alpha)$ -Quantil der (zentralen) t-Verteilung mit

 $df = n_1 + n_2 - 2$  Freiheitsgraden im Falle *gleicher* Varianzen bzw.

 $df = \frac{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2} \text{ im Falle ungleicher Varianzen.}}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_1 - 1)^4 + (n_2 - 1)}}$ 



# 3.3.3 Äquivalenztest mit 2 verbundenen Stichproben

Ein t-Test mit zwei Stichproben für gepaarte Stichproben auf Äquivalenz oder ein t-Test mit zwei Stichproben für gepaarte Stichproben auf Nichtunterlegenheit wird verwendet, um zu zeigen, dass die Parameter  $\mu_1$  und  $\mu_2$  *praktisch* nahe genug beieinander liegen, um als quasi gleich angesehen werden zu können: *Gleichheit, bis auf eine praktisch irrelevante Abweichung.* 

Für die Differenz  $\Delta = \mu_1 - \mu_2$  der beiden Parameter werden Grenzwerte festgelegt:

- Zweiseitig nach unten und oben im Falle der Äquivalenz.
- *Einseitig* nach unten oder einseitig nach oben im Falle der Nichtunterlegenheit.

Im Falle eines *zweiseitigen* t-Tests auf *Äquivalenz* bei zwei paarweise verbundenen Stichproben gibt es *zwei* Nullhypothesen und somit *zwei* einseitige t-Tests (das "ODER" ist hier exklusiv):

Für die Differenz  $\Delta = \mu_1 - \mu_2$  formuliert man die beiden Nullhypothesen

 $H_{0.unten}: \Delta \leq b_L \ ODER \ H_{0.oben}: \Delta \geq b_U$ 

gegen die Alternativhypothese

 $H_1: b_L < \Delta < b_U$ 

mit:

: Eingabewert für die untere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz  $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ .

 $b_U$  : Eingabewert für die obere Äquivalenzgrenze, definiert für die Differenz  $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ .

Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte zunächst einen Datensatz mit zwei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden

#### Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <>2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
     <Lagetest> | <Äquivalenztest mit 2 verb. Stichproben>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der zwei gewünschten Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.


- Register <Testen>:
  - Eingabe der unteren Äquivalenzgrenze  $b_L$  (falls erforderlich).
  - Eingabe der oberen Äquivalenzgrenze  $b_U$  (falls erforderlich).
  - Auswahl der gewünschten Alternativhypothese.
  - Klick auf das "Taschenrechner"-Symbol, um den Test auszuführen.

					Equivalence te	st with two c	onnected s	amples					
Selection	Data	Planning	Test										
Description 1 Weight befo	Description 1st characteristic Weight before diet			Equivalence test with two connected samples									
								Weight b	efore diet				
10	no	1,75	bu		x		1.20			n <sub>eff</sub>		10	I
					S	(	0.92			s <sup>2</sup>		0.84	14
1,2000000	)0C x <sub>D</sub>				H <sub>0</sub>	The differen	nce is small	er or equal t	than/to the	lower limit o	or larger or	equal than/to	the upper limit
					H <sub>1</sub>	The differen	nce is withir	n the "upper	limit - lowe	er limit" inte	rval		
0,91893658	135 s d	0,25	bL		Test level	lov	critical wer	values up	per		1	Test statistics	
					α = 5 %	-1,83	3311	1,83	3311				
					α = 1 %	-2,82	2144	2,82	2144		D	- bu _1 90269*	
				α = 0.1 %		-4,2	4,29683		<u>SD</u>				
					Test results						√	nD	
					Die Äquivalenz	ist nachweis	sbar‼! (α≤	5%)		D		1.	.20000
				bu	1.75000	dfu		9	tu	-1.8	9268	рu	0.04547
				bL	0.25000	dfL	1	9	tL	3.2	6917	рı	0.00485
two-sided te	est			Confidence level Iower upper									
● H <sub>0</sub> :D	D≤b∟ID:	≥bu H <sub>1</sub> :	:b_ < D < bu		1 - α = 95 %			0.6	567			1.733	
one-sided te	est Ha∵Dic hu		I. D.S.b.		1 - α = 99 %			0.3	380			2.020	
	10.0 10		11.0 / 01		1 - α = 99.9 %			-0.0	486			2.449	
	1 <sub>0</sub> :D ≥ b u	H	l₁:D <bυ< td=""><td></td><td></td><td></td><td></td><td>b</td><td></td><td></td><td></td><td>bu i</td><td></td></bυ<>					b				bu i	
					-2	-1		U		1		2	

Abbildung 24: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt exemplarisch ein Ergebnis eines Äquivalenztests für zwei paarweise verbundene Stichproben.



Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\begin{array}{l} \Delta \leq b_L \\ \text{oder} \\ \Delta \geq b_U \end{array}$	$b_L < \Delta < b_U$	$\frac{D - b_L}{\left(\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right)}$ oder $\frac{D - b_U}{\left(\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right)}$	$> t_{1-lpha;n-1}$ oder $< t_{lpha;n-1}$
$\Delta \leq b_L$	$\Delta > b_L$	$\frac{D - b_L}{\left(\frac{s_D}{\sqrt{n}}\right)}$	$> t_{1-\alpha;n-1}$
$\Delta \ge b_U$	$b_U < \Delta$	$rac{D-b_U}{\left(rac{\mathcal{S}_D}{\sqrt{n}} ight)}$	$< t_{\alpha;n-1}$

## Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (grün: Äquivalenz, blau: Nichtunterlegenheit)

## Berechnung der Vertrauensbereichsgrenzen (grün: Äquivalenz, blau: Nichtunterlegenheit)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Vertrauenswbereichsgrenzen
$\begin{array}{l} \Delta \leq b_L \\ \text{oder} \\ \Delta \geq b_U \end{array}$	$b_L < \Delta < b_U$	$D + t_{\alpha;n-1} \times \frac{s_D}{\sqrt{n}} \le \Delta \le D + t_{1-\alpha;n-1} \times \frac{s_D}{\sqrt{n}}$
$\Delta \leq b_L$	$\Delta > b_L$	$D + t_{\alpha;n-1} \times \frac{S_D}{\sqrt{n}} \le \Delta$
$\Delta \ge b_U$	$b_U < \Delta$	$\Delta \le D + t_{1-\alpha;n-1} \times \frac{s_D}{\sqrt{n}}$

wo:

 $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ 

 $d_i$  : Differenz des *i*Wertepaares der Stichprobe,

 $d_i = x_{1.i} - x_{2.i}$  für i = 1, 2, ..., n

- *n*: : Stichprobengröße der Unterschiede
- $x_{1,i}$  : Der *i*Wert der ersten Stichprobe
- *x*<sub>2.*i*</sub> : Der *i*Wert der zweiten Stichprobe
- *D* : Der arithmetische Mittelwert der Differenzen,  $D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i$
- $s_D$  : Die Standardabweichung der Differenzen,

$$s_D = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (d_i - D)^2}$$

 $t_{p;df}$  : Das *p*-Quantil der (zentralen) t-Verteilung für df Freiheitsgrade



# 3.3.4 Einfache ANOVA (ANOVA I) (>2 Stichproben, Vergleich Lageparameter)

Die einfache ANOVA wird verwendet, um *mehr* als zwei Mittelwerte (Parameter  $\mu$ ) auf der Grundlage von Multiple-Stichproben zu vergleichen (Annahme: jede dieser Stichproben wird zufällig aus einer normal verteilten Grundgesamtheit entnommen). Außerdem wird angenommen, dass die Standardabweichung  $\sigma$  gleich ist (für alle normalverteilten Grundgesamtheiten). Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte einen Datensatz mit mindestens drei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

### Den Test durchführen:

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <>2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
     <Lagetest> | <einfache ANOVA>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der gewünschten drei oder mehr Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Testen>:
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.



	One-way ANOVA (ANOVA I)										
Selection	n	Data	Test								
	Comparison of expected values of more than two normal distributions										
H <sub>0</sub> The expected values of the populations are equal											
H <sub>1</sub> The expected values of the populations are NOT equal (at least for one pair)											
		<b>T</b> - 1			critical	values					
Test level				lower	upper	lest statistics					
	a = 5 %					3.28					
		a = 1 %				5.31		22 6 46 7888			
		a = 0.1 °	%			8.58	32.6467				
		Test resu	lts								
	Null hypothesis rejected at level $a \le 0,1\%$										
Pop. activ Description						n	Average	Standard deviation	Variance		
1 X Filler 1						12	333,2583333333	0,6215206182	0,3862878788		
2 X Filler 2						12	331,1583333333	0,6273440890	0,3935606061		
3 X Filler 3 12						12	332,9583333333	0,8016554841	0,6426515152		

Abbildung 25: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt das Ergebnis einer einfachen ANOVA.



## Berechnung der Prüfgröße und der kritischen Werte (Balanciertes Design)

Nullhypothese H0	Alternativhypothese H1	Prüfgröße	Kritischer Wert
$\mu_i = konstant$	$\mu_i \neq \mu_j$ für mindestens ein Paar	$F = \frac{S_A^2}{S_e^2}$	$> F_{1-\alpha;df_A;df_e}$
mit: $SSA = n \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$			
$s_A^2 = \frac{SSA}{k-1}$			
$SSE = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_{i,j} - \bar{x}_i)^2$			
$s_e^2 = \frac{SSE}{k(n-1)}$			
$df_A = k - 1$			
$df_e = k(n-1)$			
wo: n : Der Stichprobe	enumfang einer Stichprobe ( $n$ ist gleic	h für alle $k$ Stichproben: balanc	ierten Design)
k : Anzahl der Stie	chproben (entspricht der Anzahl der S	tufenwerte des Faktors)	
. Dan ' ( )Man			

 $x_{i.j}$  : Der j - te Wert der *i*-ten Stichprobe

 $\bar{x}_i$  : Arithmetischer Mittelwert der i – ten Stichprobe (i von 1 bis k)

 $\bar{x}$  : Großer Mittelwert (entspricht dem Gesamtmittelwert in einem balancierten Design)

Im Falle eines *unbalancierten* Designs (ungleicher Stichprobenumfang) wird die folgende Änderung vorgenommen:

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{i,j} - \bar{x}_i)^2$$

$$s_e^2 = \frac{SSE}{N - k}$$

$$SSA = \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

$$s_A^2 = \frac{SSA}{k - 1}$$

$$df_A = k - 1$$

$$df_e = N - k$$





Referenz:

Ronald E. WALPOLE, Raymond H. MYERS, Sharon L. MYERS, Keying YE Wahrscheinlichkeit und Statistik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 9<sup>th</sup> Ausgabe Pearson Education Limited (2016) Kapitel 13.3 Einfache Varianzanalyse pp. 529 ... 534



# 3.3.5 Bartlett Test (>2 Stichproben, Vergleich Varianzen)

Der Bartlett Test dient dem Vergleich von *mehr* als zwei Varianzen (Parameter  $\sigma^2$ ) auf der Grundlage von mehreren Stichproben (unter der Annahme, dass jede dieser Stichproben zufällig aus einer normalverteilten Grundgesamtheit entnommen wurde). Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte einen Datensatz mit mindestens drei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

### Den Test durchführen:

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <>2 Grundgesamtheiten> | <normal verteilt> |
     <Streuungstest> | <Bartlett Test>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der gewünschten drei oder mehr Merkmale klicken, um diese auszuwählen
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Testen>:
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test durchzuführen.

Simple Analysis of Variance (ANOVA II)								
Selection Data Test								
The variances of the populations are unequal								
H <sub>0</sub> The variances of the populations are equal								
H1	The variances of the popula	tions are NOT equal (at l	east for one pair)					
Testland	critical	values						
Testievei	lower	upper	lest statistics					
a = 5 %		5.99						
a = 1 %		9.21		0.00054				
a = 0.1 %		13.82		0.92254				
Test results								
Null hy	pothesis not rejected							
Pop. activ Description	n	Average	Standard deviation	Variance				
1 X Filler 1	12	333,2583333333	0,6215206182	0,3862878788				
2 X Filler 2		12	331,1583333333	0,6273440890	0,3935606061			
3 X Filler 3		12	332,9583333333	0,8016554841	0,6426515152			

Abbildung 26: Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt exemplarisch ein Ergebnis des Bartlett Tests.



### Berechnung der Prüfgröße und des kritischen Werts

1) Berechnung der Stichprobenvarianz für jede Stichprobe:

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{i,j} - \bar{x}_i)^2$$

2) Berechnung der gepoolten Varianz:

$$s_p^2 = \frac{1}{N-p} \sum_{i=1}^{p} (n_i - 1) s_i^2$$
  
 $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$ 

3) Berechnung der Hilfsvariable c:

$$c = \frac{1}{3(p-1)} \left[ \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N-p} \right] + 1$$

4) Berechnung der Prüfgröße:

$$B = \frac{1}{c} \left[ (N - p) \times ln(s_p^2) - \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1) \times ln(s_i^2) \right]$$

5) Berechnung des kritischen Wertes:  $\chi^2_{1-\alpha;p-1}$ 

wo:

*p* : Anzahl der Stichproben (=Anzahl der Faktoren)

 $\chi^2_{1-\alpha;p-1}$  : Die  $(1-\alpha)$ -Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung mit df = p-1 Freiheitsgraden

#### Referenz:

Ronald E. WARPOLE, Raymond H. MEYRS, Sharon L. MYERS, Keying YE Probability and Statistics for Engineers & Scientists Neunte Auflage (2017) Pearson Education Ltd. ISBN 9781292161365 Abschnitt 13.4 Tests for the Equality of Several Variances Seite 536 ff





# 3.3.6 Kruskal-Wallis-Test (>2 Stichproben, vergleich Lage)

Der Kruskal-Wallis-Test dient dem Vergleich von *mehr* als zwei Lageparametern auf der Grundlage von Multiple-Stichproben (unter der Annahme, dass jede dieser Stichproben zufällig aus gleich geformten Grundgesamtheiten gezogen wird). Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte einen Datensatz mit mindestens drei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

## Den Test durchführen:

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <>2 Grundgesamtheiten> | <Nicht normal verteilt> |
     Lagetest> | <H Test nach Kruskal Wallis>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der gewünschten drei oder mehr Merkmale klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Testen>:
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.

Multiple subgroup location test									
Selection	Data	Test							
	Comparison of the location of more than two arbitrary continuous distributions (Kruskal-Wallis)								
	H <sub>0</sub> The location parameters of the populations are equal								
	H <sub>1</sub>		The location parameters of t	the populations are NOT	equal				
			critical	values					
	Testiev	e	lower	upper	lest stausucs				
	a = 5 %	6		5.99					
	a = 1 %	6		9.21	22 5405***				
-	a = 0.1	%		13.82					
	Test resu	ilts							
		Null hypothesis	s rejected at level $a \leq 0,1\%$						
P-Value % 0.00127 %									
Pop. activ Description				n					
1 χ	1 X Filler 1								
2 χ	Filler 2			12					
з Х	Filler 3			12					

Abbildung 27: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt ein Ergebnis des Kruskal-Wallis-Tests.

QDas-1903



### Berechnung der statistischen Daten des Tests

Die Kruskal-Wallis-Teststatistik *H* ist wie folgt definiert:

$$H = \frac{1}{B} \left[ \frac{12}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n_i} r_i^2 - 3(N+1) \right]$$

wo:

- *N* : Der Gesamtumfang der Stichprobe  $N = \sum n_i$ .
- $n_i$  : Der Umfang der i ten Stichprobe.
- *p* : Die Anzahl der Stichproben (Anzahl der Niveaus der Faktoren)
- *B* : Bindungskorrekturblock (wenn es keine Bindungen gibt, wird B=1 gesetzt):

$$B = 1 - \frac{1}{N^3 - N} \sum_{j=1}^{g} (t_j^3 - t_j)$$

wobei g die Anzahl an Bindungsgruppen ist (Bindung: mehrfaches Vorkommen des gleichen Wertes). Der Wert  $t_i$  ist die Anzahl der Werte in der j - ten Bindungsgruppe.

## Berechnung der statistischen Daten des Tests

 $\chi^2_{1-\alpha;2}$  : Das  $(1-\alpha)$ -Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung mit df = 2 Freiheitsgraden.



# 3.3.7 Levene-Test (> 2 Stichproben, Vergleich Streuung)

Der Levene-Test wird verwendet, um die Streuung mehrerer Grundgesamtheiten miteinander zu vergleichen. Es wird vorausgesetzt, dass die Stichproben zufällig aus Grundgesamtheiten mit gleicher Form entnommen wurden. Bevor der Test ausgeführt werden kann, bitte einen Datensatz mit mindestens drei stetigen Merkmalen erzeugen oder laden.

## Den Test durchführen

Multifunktionsleiste:

• Register < Ergebnisse> | < Testverfahren> | < Assistent (Testverfahren)>

Fenster "Assistent (Testverfahren)":

- Register <Auswahl>:
  - Folgende Schaltflächen nacheinander anklicken:
     <stetige Verteilungen> | <>2 Grundgesamtheiten> | <Nicht normal verteilt> |
     <Streuungstest> | <Levene-Test>
- Register <Daten>:
  - In der Spalte "aktiv" auf die Zellen der gewünschten Merkmale (mindestens drei) klicken, um diese auszuwählen.
  - Anschließend auf die grüne Vorwärtsschaltfläche (→) klicken.
- Register <Testen>:
  - Auf das "Taschenrechner"-Symbol klicken, um den Test auszuführen.



	Multiple subgroups variation test									
Selecti	ion	Data	Test							
	Comparison of the dispersions of more than two arbitrary continuous distributions (Levene)									
H <sub>0</sub> The dispersions of the populations are equal										
		H1			The dispersions of the popu	e dispersions of the populations are NOT equal				
		Test lev	el		critical	values	Test statistics			
					lower	upper				
	a = 5 %					5.99				
	a = 1 %					9.21	1 57005			
-		a = 0.1	%			13.82	1.57095			
		Test resu	ilts							
				Null hy	pothesis not rejected					
P-Value %			45.59 %							
Pop. activ Description						n				
1 X Filler 1						12				
2 X Filler 2						12				
3 X Filler 3						12				

Abbildung 28: Das Fenster "Assistent (Testverfahren)" zeigt exemplarisch ein Ergebnis des Levene-Tests.

## Berechnung der Prüfgröße:

In einem ersten Schritt wird für jede Stichprobe die *absolute Abweichung vom Mittelwert der Stichprobe* berechnet. Im nächsten Schritt werden den absoluten Abweichungen *Ränge* zugewiesen. Im letzten Schritt wird der Kruskal-Wallis-Test mit diesen Rängen durchgeführt.